Topologie

Sommersemester 2011

Inhaltsverzeichnis

1 Metrische Räume

Definition 1. Ein *metrischer Raum* (X, d) besteht aus einer Menge X und einer Funktion $d : X \times X \to [0, \infty)$ mit

1. $d(x, y) \geq 0, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$

Beispiel. $\mathbb{R}^n, d((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) := \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$

Definition 2. Sei X ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Dann ist $\operatorname{Int}(A) := \{a \in A | \exists \varepsilon > 0 : K_\varepsilon(a) \subset A\}$ das *Innere* von A mit den fünf Eigenschaften.

Eigenschaften

a) $\operatorname{Int}(X) = X$

b) $\operatorname{Int}(A) \subset A$

c) $\operatorname{Int}^2(A) = \operatorname{Int}(A)$

d) $A \subset B \Rightarrow \operatorname{Int}(A) \subset \operatorname{Int}(B)$

e) $\bigcup_{i \in I} \operatorname{Int}(A_i) \subset \operatorname{Int}(\bigcup_{i \in I} A_i)$

Weiterhin heißt $A \subset X$ *offen* $\Leftrightarrow \operatorname{Int}(A) = A$

Definition 3. Die *Topologie des metrischen Raumes* ist die Familie $\mathcal{O}$ aller offenen Mengen.

Satz 4. *Für einen metrischen Raum X gilt:*

1. $\varnothing, X \in \mathcal{O}$
2. $U_1, U_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}$

3. $U_i \in \mathcal{O} \Rightarrow \bigcup U_i \in \mathcal{O}$

Definition 5. $F \subset X$ heißt *abgeschlossen*$\Leftrightarrow X \setminus F$ offen

Satz 6. *Für einen metrischen Raum X gilt:*

1. *$\varnothing, X$ abgeschlossen*
2. *U_1, U_2 abgeschlossen $\Rightarrow U_1 \cup U_2$ abgeschlossen*
3. *U_i abgeschlossen $\Rightarrow \bigcap U_i$ abgeschlossen*

2 Topologische Räume

Definition 7. Ein *topologischer Raum* ist ein Paar $(X, \mathcal{O})$ bestehend aus

1. einer Menge X und
2. einer Familie $\mathcal{O}$ von offenen Mengen (s. o.)

Beispiel. Topologische Räume sind:

1. Metrische Räume
2. $X = \{a, b\}, \mathcal{O} = \{\varnothing, X, \{a\}\}$. Topologischer, aber kein metrischer Raum.
3. *diskrete Topologie* $\mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$
4. $\mathcal{O} = \{\varnothing, X\}$
5. $x_0 \in X$ fixiert. $U \in \mathcal{O} \Leftrightarrow (x_0 \notin U)$ oder $X \setminus U$ endlich

Definition 8. Sei $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum und $A \subset X$ beliebige Teilmenge.

$$\mathrm{Int}(A) := \{a \in A | \exists U \in \mathcal{O} : a \in U \text{ und } U \in A\}$$

Satz 9. *A offen* $\Leftrightarrow \mathrm{Int}(A) = A$

Beweis. Sei A offen. Dann existiert zu jedem $a \in A$ eine offene Menge U mit $a \in U \subset A$, nämlich $U = A$
$\Rightarrow A \subset \mathrm{Int}(A) \subset A \Rightarrow A = \mathrm{Int}(A)$. □

Umgekehrt gilt: Für jede Menge $A \in X$ ist $\mathrm{Int}(A)$ offen, weil $\mathrm{Int}(A) = \bigcup_{a \in A} U_a \in \mathcal{O}$
Gilt nun $\mathrm{Int}(A) = A$, so $A \in \mathcal{O}$.

Satz 10. *Die Operation $A \to \mathrm{Int}(A)$ hat die Eigenschaften a), ..., e) aus Definition 2.*

Definition 11. $F \subset X$ abg. $\Rightarrow X \setminus F$ offen

Definition 12. $A \subset X$ beliebig. Dann ist

$$\overline{A} := \bigcap_{A \subset F \text{ abg.}} F$$

die *abgeschlossene Hülle* von A und abgeschlossen.

Satz 13. *Sei X ein metrischer Raum.*

- $\overline{\varnothing} = \varnothing$
- $\overline{X} = X$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

2.1 Basis einer Topologie

Definition 14. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Eine *Basis* des topologischen Raums ist eine Teilfamilie $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ mit der Eigenschaft, dass

$$\forall U \in \mathcal{O} \exists (V_j) \in \mathcal{B} : U = \bigcup_{j \in I} V_j$$

Beispiel. (X, d) metr. Raum, $\mathcal{B} = \{K_\varepsilon(x_0) | x_0 \in X, \varepsilon > 0\}$

Satz 15 (Eigenschaften)**.** *Sei X ein topologischer Raum.*

1. *$U_1, U_2 \in \mathcal{B}$ und sei $X \in U_1 \cap U_2$. Dann existiert $U \in \mathcal{B}$ mit $x \in U \subset U_1 \cap U_2$.*
2. *Zu jedem $x_0 \in X$ existiert $U \in \mathcal{B}$ mit $x_0 \in U$.*

Beweis.

1. $U_1, U_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow U_1 \cap U_2 = \bigcup V_j . x \in U_1 \cup U_2$ existiert $j \in I$ mit $x \in V_j \subset U_1 \cap U_2$.
2. $X \in \mathcal{O} \Rightarrow X = \bigcup_{i \in I} V_i, V_i \in \mathcal{B} \Rightarrow x_0 \in V_j$ für ein j.

□

Satz 16 (Einführung einer Topologie durch Basis)**.** *X beliebige Menge.*
In X sei eine Familie $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ mit den obigen Eigenschaften gegeben. Dann ist

$$\mathcal{O} = \{U \subset X | \exists (V_j) \in \mathcal{B} : U = \bigcup V_j\}$$

eine Topoloogie.

Beispiel. 1. $\mathbb{R}^1$ mit Standardtopologie. $\mathcal{B} = \{(a, b) | a \leq b \in \mathbb{R}\}$

2. (Pfeil-Topologie) $X = \mathbb{R}^1, \mathcal{B} = \{[x,w) | x \in \mathbb{R}, w \in \mathbb{Q}\}$. Auch dieser Raum ist kein metrischer Raum und insbesondere verschieden von der Standardtopologie. Standardtopologie hat abzählbare Basis $\{K_\varepsilon(x) | \varepsilon, x \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0\}$, Pfeil-Topologie aber nicht.

Definition 17 (Umgebungsbasis)**.** $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum, $x_0 \in X$ fixiert. Eine Umgebungsbasis $\mathcal{B}(x_0) \in \mathcal{O}$ ist eine Familie offener Mengen, so dass:

1. $U \in \mathcal{B}(x_0) \Rightarrow x_0 \in U$

2. *Jede* offene Menge $U \in \mathcal{O}, x_0 \in U$ ist in einem Basiselement enthalten: $U \subseteq V \in \mathcal{B}(x_0)$.

Satz 18 (Eigenschaften von Umgebungsbasen)**.** *Für eine Umgebungsbasis $\mathcal{B}$ gilt:*

UB1: $U \in \mathcal{B}(x_0) \Rightarrow x_0 \in U$

UB2: *$x \in U \in \mathcal{B}(y)$, so existiert $V \in \mathcal{B}(x)$ mit $x \in V \subset U$.*

UB3: *$U_1, U_2 \in \mathcal{B}(x)$, so ex. $U \in \mathcal{B}(x), x \in U \subset U_1 \cap U_2$*

Satz 19 (Einführung einer Topologie durch Umgebungsbasen)**.** *Sei X eine beliebige Menge, $\{\mathcal{B}(x)\}_{x \in X}$ System mit den obigen Eigenschaften. $U \in \mathcal{O} \Leftrightarrow \exists x_i \in X \exists U_i \in \mathcal{B}(x_i) : U = \bigcup U_i$. Dann ist $\mathcal{O}$ Topologie.*

Beispiel (NIEMYCKI-Ebene)**.** $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$

1. Ist $(x,y) \in X$ mit $y > 0$, so besteht $\mathcal{B}(x,y)$ aus den üblichen, offenen Kreisen, die in X liegen.

2. Ist $(x,0) \in X$, so besteht $\mathcal{B}(x,0)$ aus dem Inneren der Kreise, welche in $X \setminus \mathbb{R}^1$ liegen und tangential an $\mathbb{R}^1$ liegen zusammen mit dem Punkt $(x,0)$ selbst.

$$\mathcal{B}(x,0) = \{K_\varepsilon(x,\varepsilon) \cup \{(x,0)\} | \varepsilon > 0\}$$

Diese Familie definiert eine Topologie in der oberen Halbebene. Auch dies ist kein metrischer Raum.

3 Stetige Abbildungen

Beispiel (Erinnerung)**.** $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume, $f : X \to Y$. f ist stetig $\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{O}_Y : f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X$

Definition 20 (Stetigkeit)**.** Seien $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume, $f : X \to Y$. Dann ist f stetig $\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{O}_Y : f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X$

Beispiel. Trägt X die diskrete Topologie oder Y die triviale Topologie, so sind automatisch alle Abbildungen $X \to Y$ stetig.

Satz 21. *Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$, so ist auch $g \circ f : X \to Z$ stetig.*

4 Trennungseigenschaften

Definition 22 ($\mathcal{T}_1$-Raum)**.** Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt $\mathcal{T}_1$-*Raum*, falls jede Einpunktmenge $\{x_0\}, x_0 \in X$ abgeschlossen ist.

Beispiel. $\mathcal{T}_1$-Räume sind:

- Jeder metrische Raum
- Gegenbeispiel: $X = \{a, b\}$ oder X beliebige Menge mit mehr als einem Punkt, $\mathcal{O} = \{\varnothing, X\} \Rightarrow$ nur $\varnothing$ und X sind abgeschlossen $\Rightarrow$ i. A. Punkte *nicht* abgeschlossen.

Definition 23 ($\mathcal{T}_2$-Raum)**.** Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt $\mathcal{T}_2$- oder HAUSDORFF-Raum, falls man zwei Punkte durch offene Mengen trennen kann:

$$\forall x \neq y \in X : \exists U, V \in \mathcal{O} : x \in U, y \in V \text{ und } U \cap V = \varnothing$$

Satz 24. $\mathcal{T}_2 \Rightarrow \mathcal{T}_1$

Beweis. $x_0 \in X, x \neq x_0 \Rightarrow \exists U_x, V_x : x_0 \in U_x, x \in V_x; U_x, V_x \in \mathcal{O}, U_x \cap V_x = \varnothing$ Bilde $V : \bigcup_{x \neq x_0} U_x$. Dann gilt $X \setminus \{x_0\} \subset V \subset X \setminus \{x_0\}$ Damit ist $V = X \setminus \{x_0\}$, aber V offen! Also ist $\{x_0\}$ abgeschlossen. □

Beispiel ($\mathcal{T}_1 \neq \mathcal{T}_2$)**.** Sei X eine unendliche Menge mit der Topologie

$$\mathcal{O} = \{\varnothing, X \setminus A | A \subset X, A \text{ endliche Menge}\}$$

In dieser Topologie ist $X \setminus \{x_0\}$ eine offene Menge, also $\{x_0\}$ abgeschlossen. $(X, \mathcal{O})$ ist also $\mathcal{T}_1$-Raum.
Aber: $x \neq y, x \in U = X \setminus A_1, y \in V = X \setminus A_2$. Dann folgt $U \cap V = X \setminus (A_1 \cup A_2) \neq \varnothing$. Also ist $(X, \mathcal{O})$ kein $\mathcal{T}_2$-Raum.

Satz 25. *Sei $(X, \mathcal{O})$ beliebiger topologischer Raum, Y HAUSDORFF-Raum, $f, g : X \to Y$ seien stetig. Dann ist die Menge $\{x \in X | f(x) = g(x)\}$ eine abgeschlossene Teilmenge.*

Beweis. $x_0 \in X \setminus \{x \in X | f(x) = g(x)\}$. Dann $f(x_0) \neq g(x_0)$. Also gibt es $V_1, V_2 \subset Y$ offen, so dass $f(x_0) \in V_1, g(x_0) \in V_2, V_1 \cap V_2 = \varnothing$.
Aber: $x_0 \in f^{-1}(V_1) \cap g^{-1}(V_2)$ und $f^{-1}(V_1) \cap g^{-1}(V_2)$ ist offen.
Weiterhin: $x^* \in f^{-1}(V_1) \cap g^{-1}(V_2) \Rightarrow f(x^*) \in V_1, g(x^*) \in V_2 \Rightarrow f(x^*) \neq g(x^*)$
Also: $x_0 \in f^{-1}(V_1) \cap g^{-1}(V_2) \subset X \setminus \{x \in X | f(x) = g(x)\}$
Damit ist $X \setminus \{x \in X | f(x) = g(x)\}$ *offen*,also $\{x \in X | f(x) = g(x)\}$ abgeschlossen. □

Definition 26 ($\mathcal{T}_3$-Raum)**.** Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ ist ein $\mathcal{T}_3$-*Raum (regulärer Raum)*, falls er $\mathcal{T}_1$ ist und man Punkte von abgeschlossenen Mengen trennen kann:

1. $X \in \mathcal{T}_1$
2. $\forall x_0 \in X, F \subset X$ abgeschlossen mit $x_0 \notin F \exists U, V \in \mathcal{O} : x \in U, F \subset V, U \cap V = \varnothing$

Satz 27. *Jeder $\mathcal{T}_3$-Raum ist $\mathcal{T}_2$-Raum.*

Beispiel ($\mathcal{T}_2 \subsetneq \mathcal{T}_3$)**.** $X = \mathbb{R}^1$, Topologie durch Umgebungsbasis:

$$F := \left\{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$\mathcal{B}(x) := \begin{cases} \{(\frac{x-1}{i}, \frac{x+1}{i}) | i \in \mathbb{N}\} & x \neq 0 \\ \{(\frac{-1}{i}, \frac{1}{i}) \setminus F | i \in \mathbb{N}\} & x = 0 \end{cases}$$

$\mathcal{B}(x)$ definiert eine Topologie, die $\mathcal{T}_2$ ist und F ist in dieser Topologie abgeschlossen. In ihr kann man F nicht von 0 durch offene Mengen trennen.

Definition 28 ($\mathcal{T}_{3\frac{1}{2}}$-Raum)**.** Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ ist ein $\mathcal{T}_{3\frac{1}{2}}$-Raum (oder auch TICHONOV-Raum), falls Punkte funktional von abgeschlossenen Mengen getrennt werden können:

1. $X \in \mathcal{T}_1$ und
2. $\forall x_0 \in X, F \ni x_0$ abgeschlossen $\exists f : X \to [0,1]$ stetig und $f(x_0) = 0, f|_F \equiv 1$.

Beispiel. Betrachte $U = f^{-1}([0, \frac{1}{3})), V = f^{-1}((\frac{2}{3}, 1])$ sind dann offen in X und es gilt $x_0 \in U, F \subset V, U \cap V = \varnothing$.

Satz 29. $\mathcal{T}_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow \mathcal{T}_3$

Beispiel ($\mathcal{T}_3 \subsetneq \mathcal{T}_{3\frac{1}{2}}$ (1981))**.** $M_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, 0 \leq y \leq 2\}, m_0 = (-1, 0), X = M_0 \cup \{m_0\}$ mit Umgebungsbasis.
$L = \{(x, 0) | x \geq 0\}$

1. Fall: $(x,y) \in X \setminus (L \cup \{m_0\}), B((x,y)) = \{\{(x,y)\}\}$.
2. Fall: $B(m_0) = \{\{m_0\} \cup \{(x,y) : 0 \leq y \leq 2, x \geq i\}_{i \in \mathbb{N}}\}$
3. Fall: $B((x,0)) = \{(\{(x,y) : 0 \leq y \leq 2\} \cup \{(x+y, y) : 0 \leq y \leq 2\}) \setminus A | A$ endlich$\}$

Eigenschaften:

- UB1-UB3 sind erfüllt, also ist es eine Topologie.
- X ist $\mathcal{T}_3$-Raum
- ... aber kein $\mathcal{T}_{3\frac{1}{2}}$-Raum, weil m_0 nicht vom Intervall $[0,1] \subset L \subset X$ funktional getrennt werden kann, $[0,1]$ jedoch in der Topologie abgeschlossen ist.

Definition 30 ($\mathcal{T}_4$-Raum)**.** Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ ist ein *$\mathcal{T}_4$-Raum (normaler Raum)*, falls zwei abgeschlossene Mengen getrennt werden können

1. $X \in \mathcal{T}_1$ und
2. zu je zwei disunkten, abgeschlossenen Mengen F_1, F_2 gibt es disjunkte, offene Mengen $U \supset F_1, V \supset F_2$.

Beispiel ($\mathcal{T}_4 \subsetneq \mathcal{T}_{3\frac{1}{2}}$ (NIEMYCKI-Ebene))**.** $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}, X_1 = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2\} \in X$, Topologie siehe oben.
Betrachte $Q = \{(x,y) \in \mathbb{Q}^2 : y \geq 0\} \subset X$

1. Jede Teilmenge $A \in X_1$ ist abgeschlossen.
2. $\overline{Q} = X$, also Q dicht in X.

Angenommen, es wäre $X \in \mathcal{T}_4$. Sei $A \subset X_1$ eine beliebige Teilmenge. Dann sind A und $X_1 \setminus A$ abgeschlossene, disjunkte Teilmengen. Also gibt es disjunkte $U_A, V_A \subset X$ mit $A \subset U_A, X_1 \setminus A \subset V_A$. Sei $\mathbb{Q}_A = U_A \cap \mathbb{Q}$.
Damit entsteht $\mathcal{P}(X_1) \ni A \to \mathbb{Q}_A \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$. Diese Abbildung ist nicht injektiv, denn $|X_1| = c$, aber $\mathbb{Q}$ abzählbar.
Angenommen, $\mathbb{Q}_A = \mathbb{Q}_B$. Wenn $\overline{Q} = X \Rightarrow \overline{Q \cap U_A} = \overline{U_A}$ (siehe Übung). Dann folgt $\overline{U_A} = \overline{U_B}$. Jetzt folgt: $A \setminus B = A \cap (X_A \setminus B) \subset U_A \cap V_B \subset \overline{U_A} \cap V_B = \overline{U_B} \cap V_B$
Aber $U_B \cap V_B = \varnothing \Rightarrow U_B \subset X \setminus V_B \Rightarrow \overline{U_B} \subset X \setminus V_B$
$\Rightarrow A \setminus B = \varnothing$. Analog $B \setminus A = \varnothing$
$\Rightarrow A = B$
Damit ist die NIEMYCKI-Ebene nicht $\mathcal{T}_4$.
Jedoch ist sie $T_{3\frac{1}{2}}$.

Satz 31. *Jeder metrische Raum (X,d) ist eine $\mathcal{T}_4$-Raum.*

Beweis. Sei X metrischer Raum, $A \subset X, x_0 \in X$. $dist(x_0, A) := \inf\{d(x_0,a) | a \in A\}$

- $\operatorname{dist}(x_0, A) \geq 0$
- $\operatorname{dist}(x_0, A) = 0 \Rightarrow \exists a_1, a_2, \ldots, a_n \in A, d(x_0, a_i) \to 0$. Dann konvergiert $a_i \to x_0$ und $a_i \in A \Rightarrow x_0 \in \overline{A}$.

Also: $\operatorname{dist}(x_0, A) = 0 \Leftrightarrow x_0 \in \overline{A}$.
Insbesondere: Ist A abgeschlossen, so gilt $\operatorname{dist}(x_0, A) = 0 \Leftrightarrow x_0 \in A$.
$A \subset X$ fixierte Teilmenge (nicht notwendig abgeschlossen). Wir beweisen, dass $X \ni x \mapsto \operatorname{dist}(x, A) \in [0, \infty)$ eine stetige Funktion ist. Fixiere $\varepsilon > 0; x_1, x_2 \in X$. Dann existiert $a_1 \in A$ mit

1. $d(x_1, a_1) \leq \operatorname{dist}(x_1, A) + \varepsilon$
2. $\operatorname{dist}(x_2, A) \leq d(x_2, a_1)$
3. $d(x_2, a_1) \leq d(x_1, x_2) + d(x_1, a_1)$.

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \operatorname{dist}(x_2, A) \le d(x_1, x_2) + \operatorname{dist}(x_1, A) + \varepsilon \\
\Leftrightarrow\ &\operatorname{dist}(x_2, A) - \operatorname{dist}(x_1, A) \le d(x_1, x_2) + \varepsilon \\
&\operatorname{dist}(x_1, A) - \operatorname{dist}(x_2, A) \le d(x_1, x_2) + \varepsilon \\
\Rightarrow\ &|\operatorname{dist}(x_1, A) - \operatorname{dist}(x_2, A)| \le d(x_1, x_2) + \varepsilon \\
\Rightarrow\ &|\operatorname{dist}(x_1, A) - \operatorname{dist}(x_2, A)| \le d(x_1, x_2)
\end{aligned}
$$

Daraus folgt sofort die Stetigkeit von $x \mapsto \operatorname{dist}(x, A)$.
Seien nun $F_1, F_2 \subset X$ abgeschlossene, disjunkte Mengen. Dann ist die Funktion $\rho(x) = \frac{\operatorname{dist}(x,F_1)-\operatorname{dist}(x,F_2)}{\operatorname{dist}(x,F_1)+\operatorname{dist}(x,F_2)}$ überall definiert und stetig.
$x \in F_1 \Rightarrow \operatorname{dist}(x, F_1) = 0 \Rightarrow \rho(x) = -1$
$x \in F_2 \Rightarrow \operatorname{dist}(x, F_2) = 0 \Rightarrow \rho(x) = 1$
und $U_1 = \rho^{-1}(-\infty, -\frac{1}{2}), U_2 = \rho^{-1}(\frac{1}{2}, \infty)$ sind disjunkt und offen in X mit $F_1 \in U_1, F_2, \in U_2$. □

Satz 32 (URYSOHN). *Sei X ein $\mathcal{T}_4$-Raum, $A, B \subset X$ disjunkt und abgeschlossen. Dann gibt es eine stetige Funktion $f : X \to [0, 1]$ mit $f|_A \equiv 0, f|_B \equiv 1$.*

Beweis. Seien □

Sei $(r_i)_{i\in\mathbb{N}} = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ angeordnet mit $r_0 = 0, r_1 = 1$. Zu jeder rationalen Zahl $r \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ konstruieren wir eine offene Menge $V_r \subset X$ mit

1. $r < r' \Rightarrow \overline{V_r} \subset V_{r'}$
2. $V_0 \supset A, V_1 = X \setminus B$

Die Konstruktion erfolgt induktiv.

$\underline{r_0}$: Konstruieren der Menge $V_{r_0} = V_0$.

Seien A, B disjunkt und abgeschlossen. Wenn $X \in \mathcal{T}_4$ gibt es offene Menge $U \subset X$ und $V \subset X$ mit $A \subset U, B \subset V, U \cap V = \varnothing$.

Dann ist $U \subset X \setminus V \Rightarrow \overline{U} \subset X \setminus V \subset X \setminus B$. Setze $V_0 := U$ und $V_1 := X \setminus B$. Dann gilt $\overline{V_0} \subset V_1$.

Induktion: Seien $V_{r_0}, V_{r_1}, \ldots, V_{r_n}$ bereits konstruiert mit 1).

Zum Konstruieren von $V_{r_{n+1}}$ betrachte man die *größte* rationale Zahl r_ℓ unter $r_0, \ldots, r_n$, welche kleiner als r_{n+1} ist, sowie die kleinste Zahl r_p, welche größer als r_{n+1} ist. Dann gilt $r_\ell < r_p$ und es folgt $\overline{V_{r_\ell}} \subset V_{r_p}$. Die Mengen V_{r_ℓ} und $X \setminus V_{r_p}$ sind abgeschlossen und disjunkt:

$X \in \mathcal{T}_4 \Rightarrow$ es gibt offene Mengen $W \supset V_{r_\ell}, W_2 \supset X \setminus V_{r_p}, W_1 \cap W_2 = \varnothing$.

Es gilt $\overline{W_1} \subset \overline{X \setminus W_2} = X \setminus W_2 \subset V_{r_p}$.

Setze $V_{r_{n+1}} := W_1$. Dann ist $\overline{V_{r_{n+1}}} \subset V_{r_p}$.

Damit entsteht eine Familie $\{V_r\}_{r\in[0,1]\cap\mathbb{Q}}$. Wir definieren

$$f(x) := \begin{cases} \inf\{r|x \in V_r\} & \text{falls } x \in V_1 \\ 1 & \text{falls } x \notin V_1, \text{ d. h. } x \in B \end{cases}$$

Nach Konstruktion $f|_B \equiv B$ und $f|_A \equiv 0$, weil $A \subset V_0$. Sei nun $a \in [0,1]$
$x \in f^{-1}([0,a)) \Leftrightarrow f(x) < a \Rightarrow \inf\{r|x \in V_r\} < a \Leftrightarrow \exists r_j < a$ und $x \in V_{r_j}$
$\Rightarrow f^{-1}([0,a)) = \bigcup_{r_j<a} V_{r_j} \Rightarrow f^{-1}([0,a)) \subset X$ ist offen.

Korollar 33. $\mathcal{T}_{3\frac{1}{2}} \supseteq \mathcal{T}_{4\frac{1}{2}} = \mathcal{T}_4$.

Lemma 34. *$X \in \mathcal{T}_4, F = \overline{F} \subset X, f : F \to [-c,c]$ beschränkte, stetige Funktion. Dann existiert eine stetige Funktion $f : X \to [-c,c]$ mit*

a) $|g(x)| \leq \frac{1}{3}c$ für alle $x \in X$

b) $|f(x) - g(x)| \leq \frac{2}{3}c$ für alle $x \in F$.

Beweis. $F = \overline{F}, f : F \to [-c,c]$ stetig, dann sind die Mengen $A = f^{-1}([-c,\frac{1}{3}c])$ und $B = f^{-1}([\frac{1}{3}c,c])$ abgeschlossene Teilmengen von F. Also sind A, B abgeschlossen in X und $A \cap B = \varnothing$.
(URYSOHN) $\exists h : X \to [0,1]$ stetig, $h|_A \equiv 0, h|_B \equiv 1$.
Setze $g(x) = \frac{2}{3}c(h(x) - \frac{1}{2})$. Z. B. $|g(x)| \leq \frac{2}{3}c|h(x) - \frac{1}{2}| = \frac{2}{3}c \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}c$
$\Rightarrow g(x)$ erfüllt a). Analog erfüllt $g(x)$ die Bedingung b). □

Satz 35 (Tietze)**.** *Sei $X \in \mathcal{T}_4$, $F = \overline{F} \subset X, f : F \to \mathbb{R}^1$ stetig. Dann*

1. *Es gibt eine stetige Funktion $f^* : X \to \mathbb{R}^1$ mit $f|_F = f$*
2. *Ist $f : F \to [-1,1]$ beschränkt und stetig, so gibt es eine beschränkte Ausdehnung $f^* : X \to [-1,1]$.*

Beweis. Zunächst sei $f : F \to [-1,1]$ stetig und beschränkt. Wir definieren eine Folge $g_0, g_1, \ldots F :\to [0,1]$ mit

1. $|f(x) - \sum_{i=1}^n g_i(x)| \leq (\frac{2}{3})^n$ für alle $x \in F$
2. $|g_n(x)| \leq \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n-1}$ für alle $x \in X$.

Sei $g_0 \equiv 0; g_1, g_2, \ldots, g_n$ bereits konstruiert. Wende Lemma auf $f(x) - \sum_{i=0}^n g_i(x)$ an.
Dann gibt es eine Funktion $g_{n+1} : X \to [0,1]$ mit $|g_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n$.
$|f(x) - \sum g_i(x) - g_{n+1}(x)| \leq (\frac{2}{3})^{n+1}$.
Betrachte nun $f^*(x) = \sum_{i=1}^\infty g_i(x)$. Diese Reihe konvergiert wegen Ungleichung 2 gleichmäßig. Damit ist f^* stetig und überall auf X definiert. Wegen Ungleichung 1 ist $f^*|_F = f$ und $\sum_{i=1}^\infty |g_i(x)| \leq \frac{1}{3}\sum(\frac{2}{3})^{n-1} = 1$, d. h. $f^* : X \to [-1,1]$.
Sei $f : X \to \mathbb{R}^1$ nicht beschränkt. Dann betrachte $f_1(x) = \arctan(f(x)), x \in F$. f_1 ist stetig und beschränkt. f_1 kann auf X ausgedehnt werden, $f_1^* : X \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$\Rightarrow f^*(x) = \tan(f_1^*(x))$ für alle $x \in X$. □

5 Topologische Räume mit abzählbarer Basis

Definition 36. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. X erfüllt das *2. Abzählbarkeitsaxiom*, falls eine *abzählbare* Basis $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}$ der Topologie existiert.

Definition 37. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt *dicht*, falls $\overline{A} = X$.

Satz 38. *Erfüllt $(X, \mathcal{O})$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom, so gibt es eine abzählbare, dichte Teilmenge $A \subset X$.*

Beweis. $\mathcal{B} = \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{O}$ abzählbare Basis. Sei $a_i \in U_i$ jeweils *ein* Punkt. Bilde $A = \{a_1, a_2, \dots\}$. A ist offenbar abzählbar.
Betrachte $\overline{A} \subset X$. Dann gilt $X \setminus \overline{A}$ offen. Wäre $\varnothing \neq X \setminus \overline{A}$, so wählen wir $x_0 \in X \setminus \overline{A}$. Weil $X \setminus \overline{A}$ offen is und weil $\mathcal{B}$ eine Basis ist, gibt es $U_{i_0} \in \mathcal{B}$ mit $x_0 \in U_{i_0} \subset X \setminus \overline{A}$. Daraus folgt $U_{i_0} \cap \overline{A} = \varnothing \Rightarrow U_{i_0} \cap A = \varnothing$. Widerspruch zu $a_{i_0} \in U_{i_0} \cap A$.
Es folgt $\varnothing = X \setminus \overline{A}$, also $\overline{A} = X$. □

Beispiel. Die Rückrichtung gilt im Allgemeinen nicht, *Gegenbespiele:* Pfeil-Topologie, NIEMYCKI-Ebene

Satz 39. *Sei X ein metrischer Raum. Dann gilt:*

$$X \text{ erfüllt das 2. AA } \Leftrightarrow X \text{ hat abzählbar dichte Teilmenge}$$

Beweis. (X, d) metrischer Raum, $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ dicht. Dann ist $\mathcal{B} = \{K_r(a_i) | a_i \in A, r \in \mathbb{R}\}$ eine Basis, weil A dicht ist. □

Satz 40. *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum mit 2. AA. Dann ist*

$$X \in \mathcal{T}_3 \Leftrightarrow X \in \mathcal{T}_{3\frac{1}{2}} \Leftrightarrow X \in \mathcal{T}_4.$$

Beweis. Sei $X \in \mathcal{T}_3$ und erfülle das 2. AA, $A, B \subset X$ abgeschlossen und disjunkt. Wegen $X \in \mathcal{T}_3$ gilt $\forall x \in A \exists V_x$ offen mit $x \in V_x \in \overline{V_x} \in X \setminus B$ sowie $\forall y \in A \exists U_x$ offen mit $x \in U_x \in \overline{U_x} \in X \setminus A$.
Betrachte $\bigcup_{x \in A} V_x, \bigcup_{y \in B} U_y$. Die Menge $\bigcup_{x \in A} V_x$ ist offen und X hat eine abzählbare Basis der Topologie. Damit ist diese Menge bereits abzählbare Vereinigung von V_x-Mengen. (analog für $\bigcup_{y \in B} U_y$).
Also gibt es Mengen $V_1, V_2, \dots, U_1, U_2, \dots$ mit

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i = \bigcup_{x \in A} V_x, \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j = \bigcup_{y \in B} U_y,$$

Insbesondere gilt $\overline{V_i} \cap B = \overline{U_j} \cap A = \varnothing$.
Sei nun $G_i = V_i \setminus \bigcup_{j \leq i} \overline{U_j}$ und $h_j = U_j \setminus \bigcup_{i \leq j} \overline{V_i}$. Diese sind offen.

$$
\begin{aligned}
U := \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i &= \bigcup_{i=1}^{\infty} (V_i \setminus \bigcup_{j \le i} \overline{U_j}) \\
&\supseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{U_j} \\
&= \bigcup_{x \in A} V_x \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{U_j} \supseteq A
\end{aligned}
$$

Analog V.
U, V sind offen und disjunkt, $A \subset U, B \subset V$. $j \le i \Rightarrow G_i \cap H_j = \varnothing$, weil G_i $\overline{U_j}$ abgezogen wird, aber $H_j \subset U_j$. $i \le j$ analog. $\square$

Definition 41. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein beliebiger topologischer Raum. Ein Familie $U = \{U_i\}_{i \in I}$ offener Mengen heißt *offene Überdeckung*, falls $\bigcup_{i \in I} U_i = X$.

Satz 42. *Sei $(x, \mathcal{O})$ mit 2. AA. $U = \{U_i\}$ offene Überdeckung. Dann gibt es eine* abzählbare *Teilüberdeckung $U^* = \{U_{i_1}, U_{i_2}, \ldots\}$.*

Beweis. $\mathcal{B} = \{V_1, V_2\}$ abzählbare Basis. Bilde

$$\mathcal{B}(U) = \{V_j \in \mathcal{B} | \exists i \in I : V_j \in U_i, U_i \in U\}.$$

Zu jeder Menge $V_\alpha \in \mathcal{B}(U)$ wählen wir genau eine Menge $U_{i(\alpha)}, i(\alpha) \in I$ mit $V_\alpha \subset U_{i(\alpha)}$.
Bilde $U^* = \{U_{i(1)}, U_{i(2)}, \ldots\} \subset U$. Zu zeigen ist: U^* bleibt Überdeckung.
Sei $x_0 \in X$. Dann gibt es $U_{i_0} \in U$ mit $x_0 \in U_{i_0}$. $\mathcal{B}$ ist Basis $\Rightarrow$ es gibt $x_0 \in V_{\alpha_0} \subset U_{i_0}, V_{\alpha_0} \in \mathcal{B}, V_{\alpha_0} \in \mathcal{B}(U)$. Aber $V_{\alpha_0} \subset U_{i(\alpha_0)} \in U^*$.
Also ist $x_0 \in U_{i(\alpha_0)}, U_{i(\alpha_0)} \in U^*$. $\square$

Definition 43 (HILBERT-Würfel)**.**

$$H := \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} | 0 \le x_i \le 1\}, d(x, y) = \sum \frac{|x_i - y_i|}{2^i}$$

Satz 44. *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum mit $X \in \mathcal{T}_3$, X erfülle das 2. AA.*
Dann ist X homöomorph zu einer Teilmenge von H.

Beweis. $\mathcal{B}$ sei abzählbare Basis von $(X, \mathcal{O})$. Bilde

$$\mathcal{P} = \left\{ (V_1, V_2) \in \mathcal{B}^2 | \exists f : X \to [0,1] \text{ stetig mit } f|_{X \setminus V_2} \equiv 1, f(V_1) \subseteq \left[0, \frac{1}{2}\right) \right\}$$

Sei $x_0 \in X$ ein beliebiger Punkt, $V_2 \in \mathcal{B}$ mit $x_0 \in V_2$. Dann $x_0 \notin X \setminus V_2$.
$C \in \mathcal{T}_3$ mit 2. AA, also $X \in \mathcal{T}_4$ und $X \in \mathcal{T}_{3\frac{1}{2}}$. Damit existiert eine stetige Funktion $f : X \to [0,1]$ mit $f(x_0) = 0, f|_{X \setminus V_2} \equiv 1$.

Die Menge $V = f^{-1}([0, \frac{1}{2})) \subset X$ ist offen, $x_0 \in V$. Weil $\mathcal{B}$ Basis ist, gibt es $V_1 \in \mathcal{B}$ mit $x_0 \in V_1 \subset V$. Daraus folgt, dass das Paar $(V_1, V_2) \in \mathcal{P}$.
Zusammenfassung: Zu jedem $x_0 \in X$ und jedem $V_2 \in \mathcal{B}$ mit $x_0 \in V_2$ gibt es ein $V_1 \in \mathcal{B}$ mit $x_0 \in V_1$ und $(V_1, V_2) \in \mathcal{P}$.
Zu jedem (V_1, V_2) wählen wir eine Funktion f_{V_1,V_2} mit der Eigenschaft $f_{V_1,V_2} : X \to [0, 1]$ sind abzählbar viele stetige Funktionen. So entsteht mit $F = (f_{V_1,V_2})_{(V_1,V_2)\in\mathcal{P}} : X \to H$ eine stetige Abbildung.
Eigenschaften von F: $x_0 \in X, A = \overline{A} \subset X$ und es gelte $x_0 \notin A$. Dann ist $x_0 \in X \setminus A$, also $\exists V_2 \in \mathcal{B} : x_0 \in V_2 \subset X \setminus A \Rightarrow \exists V_1 \in \mathcal{B} : x_0 \in V_1 \subset X \setminus A$. Damit ist $(V_1, V_2) \in \mathcal{P}, x_0 \in V_1$.
Dann gilt $f_{V_1,V_2}(x_0) < \frac{1}{2}, f_{V_1,V_2}(X \setminus V_2) \subset \{1\}$
$V_2 \subset X \setminus A \Rightarrow A \subset X \setminus V_2 \Rightarrow f_{V_1,V_2}|_A \equiv 1$.
Also $f_{V_1,V_2}(x_0) \in \overline{f_{V_1,V_2}(A)}$
Zusamenfassung: $x_0 \in X, A = \overline{A} \subset X, x_0 \in X \Rightarrow F(x_0) \notin \overline{F(A)}$
$A = \{x_1\}, x_1 \neq x_0 \Rightarrow F(x_0) \notin \overline{F(x_1)} \Rightarrow F(x_0) \neq F(x_1)$. Damit ist F injektiv und die Umkehrabbildung ist stetig. □

Korollar 45. *Sei X topologischer Raum mit 2. AA. Dann ist $X \in \mathcal{T}_3$ genau dann, wenn X* metrisierbar *ist.*

Korollar 46. *Jeder metrische Raum (X, d) mit abzählbarer, dichter Teilmenge $A \subset \overline{A} = X$ ist homöomorph zu einer Teilmenge des* HILBERT*-Würfel.*
(ist universell, z. B. für metrische Räume mit abzählbarer Basis)

6 Kompakte Räume

Definition 47. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt *kompakt*, falls

a) $X \in \mathcal{T}_2$ und

b) Jede Überdeckung enthält eine endliche Teilüberdeckung. (für metrische Räume: BOREL'scher Überdeckungssatz)

Beispiel. Sei X beliebige Menge, $\mathcal{O} = \{\varnothing, X\}$. Erfüllt, b), aber nicht a).

Satz 48. *Sei X kompakt, $A \subset X$ abgeschlossen, dann ist A auch kompakt.*

Beweis. Sei $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i \subset X$ offene Überdeckung von A. Damit ist $\bigcup_{i\in I} U_i \cup (X \setminus A) = X$ eine offene Überdeckung von X. Es gibt also $i_1, \ldots, i_n$ mit $U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n} \cup (X \setminus A) = X$, also ist $A \subset U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n}$. □

Satz 49. *Kompakte topologische Räume sind $\mathcal{T}_4$.*

Beweis. Sei X kompakt

1. **Schritt:** $X \in \mathcal{T}_3$. Sei $A = \overline{A} \subset X$ abgeschlossen und $x_0 \notin A$. zu jedem Punkt $x \in A$ gibt es disjunkte, offene Mengen U_x, V_x mit $x_0 \in U_x, x \in V_x$. Dann folgt $A \subset \bigcup_{x \in A} V_x$.

   $A = \overline{A}$ abgeschlossen und X kompakt $\Rightarrow$ A ist kompakt $\Rightarrow$ $\exists x_1, \ldots, x_n \in A$: $A \subset V_{x_1} \cup \ldots \cup V_{x_n} =: V$.

   Aber: $x_0 \in U_{x_1} \cap \ldots \cap U_{x_n} =: U$. $x_0 \in U$ offen in X, $A \subset V$ offen in X und U, V disjunkt nach Konstruktion. Also $X \in \mathcal{T}_3$.

2. **Schritt:** (analog) $A = \overline{A}, B = \overline{B}, A \cap B = \varnothing$. Weil $X \in \mathcal{T}_3$ gibt es zu jedem Punkt $a \in A$ Mengen $U_a \ni a$ und $V_a \supset B$ mit $U_a \cap V_a = \varnothing$. Dann folgt $A \bigcup_a U_a$, und es gibt $a_1, \ldots, a_m \in A$ mit $A \subset \bigcup U_{a_i} =: U$. Sei $V := \bigcap V_{a_i} \supset B$.

   $A \subset U, B \subset V$ offen in X und $U \cap V = \varnothing$ nach Konstruktion.

□

Satz 50. *Sei X kompakt, $Y \in \mathcal{T}_2$ und $f : X \to Y$ stetig. Dann ist $f(X) \subset Y$ kompakt.*

Beweis. $f(X)$ ist $\mathcal{T}_2$, weil $Y \in \mathcal{T}_2$.
Sei $f(X) \subset \bigcup_{i \in I} V_i \subset Y$ offene Überdeckung. Dann ist $X = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(V_i)$ eine *offene* Überdeckung. Daher gibt es $i_1, \ldots, i_n$, so dass $X = f^{-1}(V_{i_1}) \cup \ldots \cup f^{-1}(V_{i_n})$, also $f(X) \subset V_{i_1} \cup \ldots \cup f(V_{i_n})$. □

Satz 51. *Sei X kompakt, $Y \in \mathcal{T}_2$, $f : X \to Y$ bijektiv und stetig. Dann ist $f^{-1} : Y \to X$ stetig, also f eine Homöomorphismus.*

Beweis. Sei $A = \overline{A}$ abgeschlossen. Zu zeigen: $(f^{-1})^{-1}(A) \subset Y$ ist abgeschlossen.
Dafür genügt zu zeigen: $f(A) \subset Y$ ist abgeschlossen.
$A = \overline{A} \subset X$ abgeschlossen, also A kompakt, damit auch $f(A) \subset Y$ kompakt, also $f(A)$ abgeschlossen. □

Satz 52 (Überdeckungssatz von BOREL)**.** *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist X kompakt genau dann, wenn jede Punktfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ eine konvergente Teilfolge enthält.*

Beweis. Siehe Grundstudium. □

Korollar 53. *Sei X metrisch und kompakt, dann erfüllt X das 2. AA.*

Beweis. (Beweisidee) $\varepsilon = 1, X = \bigcup_{x \in X} K_1(x) \Rightarrow x_1^1, \ldots, x_{n_1}^1, X = K_1(x_1^1) \cup \ldots \cup K_1(x_{n_1}^1)$
$\varepsilon = \frac{1}{2}, X = \bigcup_{x \in X} K_{\frac{1}{2}}(x) \Rightarrow x_1^2, \ldots, x_{n_2}^2, X = K_1(x_1^1) \cup \ldots \cup K_1(x_{n_2}^2)$
etc. □

Beispiel (ALEXANDROV-Doppelkreis)**.** . $C_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = i\}; i = 1, 2$
$X = C_1 \cup C_2$
$p : C_1 \to C_2$ Zentralprojektion.
Topologie in X:

1. Fall: $z \in C_2 \Rightarrow \mathcal{B}(z) = \{\{z\}\}$

2. Fall: $z_1 \in C_1 \Rightarrow \mathcal{B}(z_1) = \{U_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ mit $U_n(z) = V_n(z_1) \cup \{p(V_n(z_1) \setminus \{z_1\})\}$, wobei $V_n(z_1)$ eine gewöhnliche Umgebung um $z_1 \in C_1$ ist.

1. $X \in \mathcal{T}_2$

2. $C_2 \subset X$ ist diskret und hat die Mächtigkeit $c = |\mathbb{R}|$, also entählt X keine abzählbare, dichte Teilmenge.

Behauptung: X ist kompakt. (Daraus folgt dann X kompakt und nicht metrisch)

Beweis. $C_1 \subseteq X$ ist die gewöhnliche Topologie des Kreisrandes, als eine Kompakte Teilmenge.
Sei $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine Überdeckung (o. B. d. A. U_i sind aus der Basis). Also gibt es $i_1, \dots i_n$, so dass $C_1 \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n} \subset X$. Dann ist $\{U_{i_1}, \dots, U_{i_n}, \{p(x_{i_1})\}, \dots, \{p(x_{i_n})\}\}$ eine offene, endliche Überdeckung. □

Definition 54. Seien X, Y Mengen. Dann ist das *(kartesische) Produkt*

$$X \times Y := \{(x, y) | x \in X, y \in Y\}$$

Analog für abzählbar viele Mengen.
Allgemein: $\{X_i\}_{i \in I}$ beliebige (auch überabzählbare) Familie. Dann ist

$$\prod_{i \in I} X_i := \{f : I \to \bigcup_{i \in I} X_i | f(i) \in (X_i)\}.$$

Sei $i_0 \in I$ fest. Dann ist $p_{i_0} : \prod_{i \in I} \to X_{i_0}$ eine Projektion auf die i_0-te Achse; $p_{i_0}(f) := f(i_0)$.

Definition 55 (Produkttopologie)**.** Seien $(X_i, \mathcal{O}_i)$ topologische Räume. Wir führen eine Basis für $\prod X_i$ ein durch $U := \bigcap_{k=1}^{m} p_{i_k}^{-1}(U_{i_k}), U_{i_k} \in \mathcal{O}_{i_k}$ offen in X_{i_k}.

Satz 56 (Tichonov)**.** *Sei $\{X_i\}_{i \in I}$ eine Familie kompakter topologischer Räume. Dann ist $\prod_{i \in I} X_i$ kompakt.*

Beweis. Später!? □

Definition 57. Sei X ein topologischer Raum. Eine *Kompaktifizierung* von X ist ein Paar (Y, r) mit

a) Y ist kompakter Raum.

b) $r : X \to Y$ ist injektiv, stetig mit $\overline{r(X)} = Y$.

Beispiel. $S^2, \overline{D^2}$ sind Kompaktifizierungen von $\mathring{D}^2$.

Frage 1: Welche Räume haben mindestens eine Kompaktifizierung?
Antwort: $X \in \mathcal{T}_{3\frac{1}{2}}$ (und nur diese).
Frage 2: Sei X ein Raum mit wenigstens einer Kompaktifizierung. Wieviele Kompaktifizierungen gibt es?
Frage 3: Wie kann man eine solche Kompaktifizierung konstruieren?
Antwort für 2 und 3: für lokal-kompakte Räume.
Zur Erinnerung: $X \in \mathcal{T}_3$ abzählbare Basis, dann $X \simeq X^* \subset H$ (Hilbertwürfel).
Mit dem gleichen Beweis zeigt man:

Satz 58. *Sei $X \in \mathcal{T}_{3\frac{1}{2}}$ und $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}$ eine Basis der Topologie. Zu jedem $B \in \mathcal{B}$ wähle eine disjunkte Kopie des Einheitsintervalls I_B und bilde $Y = \prod_{B\in\mathcal{B}} I_B$. Dann ist Y kompakt und es gibt ein $X' \subset Y$ mit $X \simeq X'$.*

Satz 59. *Sei X ein topologischer Raum. Dann besitzt X mindestens eine Kompaktifizierung genau dann, wenn $X \in \mathcal{T}_{3\frac{1}{2}}$.*

Beweis. „$\Rightarrow$" Sei $X \hookrightarrow Y$ eine Kompaktifizierung. Dann ist Y kompakt, also $Y \in \mathcal{T}_4 \subset \mathcal{T}_{3\frac{1}{2}}$, also $X \in \mathcal{T}_{3\frac{1}{2}}$.

„$\Leftarrow$" $X \in \mathcal{T}_{3\frac{1}{2}}$. $\prod_{B\in\mathcal{B}} I_B$ ist kompakt nach vorherigem Satz. Die Kompaktifizierung ist $X \hookrightarrow \overline{X'} \subset \prod_{B\in\mathcal{B}} I_B$.

□

Definition 60 (Die ČECH-STONE-Kompaktifizierung)**.** Sei $X \in \mathcal{T}_{3\frac{1}{2}}$. Dann hat X wenigstens *eine* Kompaktifizierung.
Sei $(Y_t, r_t)_{t\in T}$ die Familie aller Kompaktifizierungen (bis auf Äquivalenz).
Bilde $Y := \prod_{t\in T} Y_t$. Nach TYCHONOV-Satz ist Y kompakt und $r : X \to Y$ wird $r(x_0) = r_t(x_0)_{t\in T} \in Y$. Somit entsteht $\overline{r(X)} = \beta(X) \in Y$ als kompakter Raum. Betrachte $X \to \beta(X)$. Wir erhalten die ČECH-STONE-Kompaktifizierung $(\beta(X), \beta)$. Die Projektion auf die t-te Achse von $\beta(X)$ liefert

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\beta} & \beta(X) \\ & \underset{r_t}{\searrow} & \downarrow \\ & & Y_t \end{array}$$

Definition 61. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt *lokal-kompakt*, falls

a) $X \in \mathcal{T}_2$

b) Zu jedem Punkt $x_0 \in X$ existiert eine offene Umgebung $U_{x_0} \ni x_0$ mit $\overline{U_{x_0}}$ kompakt.

Beispiel. $X = \mathbb{R}^n$, Mannigfaltigkeiten etc.
Unendlich-dimensionale BANACH-Räume sind *nicht* lokal kompakt. (Ein BANACH-Raum ist genau dann endlich dimensional, wenn abgeschlossene Kugeln in ihm kompakt sind)
Ist X kompakt, so ist X auch lokal-kompakt.

Definition 62 (Die minimale Kompaktifizierung eines lokal kompakten Raums)**.** $\omega(X) = X \cup \{\Omega\}$. Topologie in $\omega(X)$: $A \subset \omega(X)$ offen, falls

1. Fall: $\Omega \notin A$ und A offen in X.

2. Fall: $\Omega \in A \Rightarrow A = \{\Omega\} \dot{\cup} A_1, A_1 \subseteq X$ und $X \setminus A_1$ sei kompakt.

Satz 63. *$\omega(X)$ ist mit der gewählten Topologie kompakt.*

Beweis. $\omega(X) \in \mathcal{T}_2$

1. Fall: $x_0 \neq x_1 \in X \subset \omega(X)$. Kein Problem.

2. Fall: $x_0 \in X, x_1 = \Omega$. Sei X lokal kompakt, dann gibt es $x_0 \in U_{x_0} \subset \overline{U_{x_0}} \subset X$. Dann ist $V := \{\Omega\} \cup (X \setminus \overline{U_{x_0}})$ offen in $\omega(X)$ und $U_{x_0} \cap \{(X \setminus \overline{U_{x_0}})\} = \varnothing$.

Sei $\{U_t\}_{t\in T}$ eine offene Überdeckung von $\omega(X)$. Wähle $t_0 \in T$ mit $\Omega \in U_{t_0}$. Dann gilt $U_{t_0} = \{\Omega\} \cup (X \setminus F_{t_0}), F_{t_0} \setminus X$ kompakt. Weil F_{t_0} kompakt ist, existieren endlich viele Mengen der Überdeckung mit $F_{t_0} \subset U_{t_0} \cup \ldots \cup U_{t_n}$. Dann gilt $\omega(X) = U_{t_0} \cup \ldots \cup U_{t_n}$

□

Satz 64. *Sei X lokal-kompakt, (Y, r) beliebige Kompaktifizierung. Dann gibt es eine stetige Abbildung $f : Y \to \omega(X)$ mit $f \circ \omega = r$.*

Beweis. Die Definition von $f : Y \to \omega(X)$ ist trivial: $f(y) := \omega(x)$ für $y = r(x)$. $f(y) = \Omega$ für $y \neq r(x)$.
Zunächst: $r(X) \subset Y$ ist offen, weil: Sei $y_0 := r(x_0)$ mit $x_0 \in X$. Weil X lokal-kompakt gibt es $x_0 \in U_{x_0} \subset \overline{U_{x_0}} \subset X$. Dann ist $U_{x_0} \subset r(X) \subset Y$ offen in $r(X)$.
Dann gibt es eine Menge $W \subset Y$ offen mit $r(U_{x_0}) = r(X) \cap W$. Nun gilt $\overline{r(X)} = Y$ (Y ist Kompaktifizierung), also $\overline{W} = \overline{r(X) \cap W} = \overline{r(U_{x_0})}$.
Damit ist $\overline{W} = \overline{r(U_{x_0})} \subset \overline{(\overline{U_{x_0}})} = r(\overline{U_{x_0}}) \subset r(X)$.
Also $x \in W \subset r(X)$, wobei W offen in Y.
Stetigkeit von $f : Y \to \omega(X)$.

1: Fall: $U \in X$ offen, daher $f^{-1}(U) = U \subset X \simeq r(X) \subset Y$.

2. Fall: $\Omega \in U \subset \omega(X) \Rightarrow U = \{\Omega\} \cup (X \setminus F), F \subset X$ kompakt. $f^{-1}(U) = (Y \setminus r(X)) \cup (X \setminus F$. $(Y \setminus r(X)) \cup (X \setminus F)$ ist offen in Y, weil $y^* \in Y \setminus r(X)$, Dann ist die Menge $V := (Y \setminus r(X) \cup (X \setminus F) = Y \setminus F$.

□

Definition 65. Seien X, Y lokal-kompakt. Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ heißt *eigentliche* Abbildung, falls die Urbilder kompakter Mengen kompakt sind.

Satz 66. *Seien X, Y lokal-kompakt und $f : X \to Y$ eigentlich.*

$$\begin{array}{ccc} X & \subset & \omega(X) = X \cup \{\Omega\} \\ \downarrow f & & \downarrow F \\ Y & \subset & \omega(Y) = Y \cup \{\Omega^*\} \end{array}$$

Dann ist die Fortsetzung $F : \omega(X) \to \omega(Y)$ stetig. Sei $\Omega^* \in U = \{\Omega^*\} \cup (Y \setminus K)$ eine Umgebung in $\omega(Y)$ mit K kompakt, dann $F^{-1}(\Omega^*) = \{\Omega\} \cup (X \setminus f^{-1}(K)) \in \mathcal{O}(X)$.

7 Parakompakte und metrisierbare Räume.

Fragestellung: Wann ist ein Raum metrisierbar?
Antwort von SMIRNOV und Nagata etwa 1951.
Erinnerung: $\mathcal{T}_1 \supset \mathcal{T}_2 \supset \mathcal{T}_3 \supset \mathcal{T}_{3\frac{1}{2}} \supset \mathcal{T}_4 = \mathcal{T}_{4\frac{1}{2}} \supset$ metrische Räume.
Wir betrachten nun die *parakompakten Räume* zwischen $\mathcal{T}_{4\frac{1}{2}}$ und metrischen Räumen.

Definition 67. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein metrischer Raum. Eine *offene Überdeckung* von X ist eine Familie $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ offener Mengen mit $X = \bigcup_i U_i$.

Definition 68. Eine offene Überdeckung $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in J}$ ist *feiner* als $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$, falls zu jedem $j \in J$ ein Index $i \in I$ existiert, mit $V_j \subset U_i$. Man schreibt auch $\mathcal{V} \ll \mathcal{U}$.

Definition 69. Eine Familie $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ heißt *lokal-endlich*, falls jeder Punkt $x_0 \in X$ eine offene Umgebung U_{x_0} derart besitzt, dass $\{i \in I | A_i \cap U_{x_0} \neq \varnothing\}$ eine endliche Menge ist.

Beispiel. Jede endliche Mengenfamilie ist auch lokal-endlich.

Definition 70. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt *parakompakt*, falls

a) $X \in \mathcal{T}_2$ und

b) jede offene Überdeckung eine lokal-endliche Verfeinerung besitzt.

Bemerkung. Es gilt $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ in jedem topologischen Raum. Somit $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} \supseteq \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$. Für lokal-endliche $\{A_i\}_{i \in I}$ gilt sogar Gleichheit.

Lemma 71. *Sei X parakompakt, $A = \overline{A}, B = \overline{B}, A \cap B = \varnothing$. Voraussetzung: $\forall x \in B \exists A \subset U_x \subset X, x \in V_x \subset X$ mit $U_x \cap V_x = \varnothing$.*
Dann gibt es $A \subset U \subset X, B \subset V \subset X$ offen mit $U \cap V = \varnothing$.

Beweis. $\{X \setminus B, V_x\}_{x \in B}$ sind offene Überdeckung von X. Sei $\mathcal{W} = \{W_i\}_{i \in I}$ eine lokal-endliche Verfeinerung dieser Überdeckung.
Definiere $I_0 = \{i \in I | W_i \subset V_x$ für mindestens einen Punkt $x \in B\}$
Sei $i_0 \in I_0$. $A \cap \overline{W_{i_0}} \subset A \cap \overline{V_x} \subset A \cap (\overline{X \setminus U_x}) = \varnothing$.
Konsequenz: $A \cap \overline{W_{i_0}}$ für $i_0 \in I_0$
Weiterhin gilt $\bigcup_{i \in I_0} \supset B$, weil $\mathcal{W}$ eine Verfeinerung ist.
$\{W_i\}_{i \in I}$ ist lokal-endlich,also $\overline{\bigcup_{i \in I_0} W_i} = \bigcup_{i \in I_0} \overline{W_i}$
Definiere $U := X \setminus \overline{\bigcup_{i \in I_0} W_i} V = \bigcup_{i \in I_0} W_i$. Daraus folgt $B \subset V$ und $A \subset U$. □

Satz 72. *Jeder parakompakte Raum ist in $\mathcal{T}_4$.*

Beweis. Sei $X \in \mathcal{T}_2$ und parakompakt.

1. **Schritt:** z. z.: $X \in \mathcal{T}_3$. Sei $x \notin B = \overline{B}$. Wende Lemma auf $A = \{x\}$ und B an. Die Voraussetzung des Lemma ist erfüllt, weil $X \in \mathcal{T}_2$, also kann B offen vom Punkt x getrennt werden. Somit ist $X \in \mathcal{T}_3$.

2. **Schritt:** A, B abgeschlossen und disjunkt. Die Voraussetzung des Lemmas ist wegen $X \in \mathcal{T}_3$ erfüllt, also folgt dass sich A, B offen trennen lassen; somit ist $X \in \mathcal{T}_4$.

□

Definition 73. Sei X ein topologischer Raum. Eine *Zerlegung der Eins* ist eine Familie stetiger Funktionen $f_i : X \to [0,1], i \in I$ mit den folgenden Eigenschaften:

a) Die Mengenfamilie $\{f^{-1}((0,1])\}_{i \in I}$ ist lokal-endlich.

b) $\forall x \in X : \sum\limits_{i \in I} f_i(x) = 1$

Definition 74. Sei X ein topologischer Raum, $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ offene Überdeckung. Eine Zerlegung der Eins $\{f_j\}_{j \in J}$ ist *feiner* als $\mathcal{U}$, falls die Menge der Träger $\{\overline{f^{-1}((0,1])}\}_{j \in J}$ feiner als $\mathcal{U}$ ist.

Ziel: Für beliebige offene Überdeckungen gibt es eine feinere Zerlegung der Eins.

Lemma 75. *$X \in \mathcal{T}_4$. $\mathcal{U} = \{U_s\}_{s \in S}$ lokal-endliche, offene Überdeckung von X. Dann gibt es eine feinere Überdeckung $\mathcal{V} = \{V_s\}_{s \in S}$ mit $\overline{V_s} \subset U_s$.*

Beweis. Sei $\mathcal{G}$ die Menge aller Funktionen $G : S \to 2^X$ mit

a) $G(s) = U_s$ oder $G(s)$ ist offen und $\overline{G(s)} \subset U_s$.

b) $\bigcup_{s \in S} G(s) = X$

Halbordnung in $\mathcal{G}$: $G_1 \leq G_2 \Leftrightarrow \forall s \in S : G_1(s) \geq G_2(s)$ und $\forall s \in S : G_(s) \neq U_s \Rightarrow G_1(s) = G_2(s)$.
Sei $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}$ linear geordnet (eine Kette). Dann ist $G_0(s) = \bigcap_{G \in \mathcal{G}_0} G(s)$ ein maximales Element der Kette.
Nach dem Lemma von Zorn gibt es eine maximales Element $G_{max} \in \mathcal{G}$. Noch zu zeigen: $\overline{G_{max}(s)} \subset U_s$.
Angenommen, $\overline{G_{max}(s_0)} \cap (X \setminus U_{s_0} = \varnothing$ für einen Index $s_0 \in S$.
Betrachte $A := X \setminus \bigcup\limits_{\substack{s_0 \neq s \\ s \in S}} G_{max}(s)$ ist abgeschlossen und in $G_{max}(s_0)$ enthalten. Wegen $X \in \mathcal{T}_4$ existiert eine offene Menge $V \in X$ mit $A \subset V \subset \overline{V} \subset G_{max}(s_0) = U_{s_0}$.
Betrachte $\tilde{G}(s) = \begin{cases} G(S) & \text{falls } s \neq s_0 \\ V & \text{sonst} \end{cases}$. Dann ist $\tilde{G}$ größer als G_{max}. □

Satz 76 (Zerlegung der Eins). *Sei X ein parakompakter Raum, $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung. Dann gibt es eine Zerlegung der Eins, die feiner ist als $\mathcal{U}$.*

Beweis. $\mathcal{U}$ gegeben. Wenn X parakompakt, dann gibt es lokal-endliche Überdeckung $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}$. Nach Lemma existiert eine Überdeckung $\mathcal{W} = \{W_i\}_{i \in I}$ und $\mathcal{O} = \{O_i\}_{i \in I}$ mit $O_i \subset \overline{O_i} \subset W_i \subset \overline{W_i} \subset V_i$.
Da X parakompakt und somit $\mathcal{T}_{4\frac{1}{2}}$ ist, und $\overline{O_i}$ und $X \setminus W_i$ sind abgeschlossen und disjunkt.
Damit existiert stetige Funktion $g_i : X \to [0, 1]$ mit

1. $g_i|_{O_i} \equiv 1$
2. $g_i|_{X \setminus W_i} \equiv 0$.

Dann folgt $\overline{g_i^{-1}((0, 1])} \subset \overline{W_i} \subset V_i$. Damit ist $g(x) := \sum_{i \in I} g_i(x)$ definiert, stetig und $g(x) \geq 1 \; \forall x \in X$.
Definiere $f_i(x) = \frac{g_i(x)}{g(x)}$ □

Satz 77 (STONE 1948). *Jeder metrisierbare Raum ist parakompakt.*

Korollar 78. *In jedem metrischen Raum gibt es eine Zerlegung der Eins.*

Definition 79. Eine Mengenfamilie $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ heißt *σ-lokal-endlich*, falls $\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ und jede Mengenfamilie $\mathcal{A}_n$ lokal endlich ist.

Satz 80 (Metrisierungssatz von NAGATY/SMIRNOV 1950/51). *Ein topologischer Raum X ist metrisierbar genau dann, wenn*

1. *$X \in \mathcal{T}_3$*
2. *X hat eine σ-lokal-endliche Basis*

$\Leftrightarrow$ X ist parakompakt mit σ-lokal-endlicher Basis.

8 Identifikationen

Definition 81. Sei X ein topologischer Raum, $\sim$ eine Äquivalenzrelation. $X/\sim$ bezeichnet die Menge der *Äquivalenzklassen*. $\pi : X \to X/\sim$ ist die kanonische Projektion.

Proposition 82. *Die* Topologie *in $X/\sim$ ist wie folgt definiert: $A \in X/\sim$ ist offen genau dann, wenn $\pi^{-1}(A)$ offen in X ist. $\mathcal{O}(X/\sim)$ ist eine Topologie in $X/\sim$.*

1. *$\pi : X \to X/\sim$ ist stetig.*
2. *$B \in X/\sim$ ist abgeschlossen $\Leftrightarrow$ $\pi^{-1}(B) \in X$ abgeschlossen.*

3. *Eine Abbildung $f : X/\sim \to Y$ ist genau dann stetig, wenn $f \circ \pi : X \to Y$ stetig ist*

Beweis. $f : X/\sim \to Y$ stetig $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(U) \subset X/\sim$ offen falls $U \in Y$ offen $\Leftrightarrow$ $\pi^{-1}(f^{-1}(U) \subset X$ offen $\Leftrightarrow$ $(f \circ \pi)^{-1}(U) \in X$ offen in X für $U = Y \Leftrightarrow f \circ \pi : X \to Y$ stetig. □

Bemerkung. $X/\sim \in \mathcal{T}_1 \Leftrightarrow \{[x]\} \subset X/\sim$ abgeschlossene Menge $\Leftrightarrow$ die Klasse $[x] \subset X$ ist abgeschlossen.

Beispiel. $X = [0,1], x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$. Dann ist $X/\sim \notin \mathcal{T}_1$; $[0] = \mathbb{Q}$.

Definition 83. Sei X topologischer Raum, $\sim$ Äquivalenzrelation. $\sim$ ist eine *abgeschlossene Äquivalenzrelation*, falls *alle* Äquivalenzklassen $[x] \subset X$ abgeschlossen sind.

Satz 84. *Sei $X \in \mathcal{T}_4$, $\sim$ eine abgeschlossene Äquivalenzrelation. Dann ist $X/\sim \in \mathcal{T}_4$.*

Beweis. Zunächst ist $X/\sim \in \mathcal{T}_1$. $A, B \subset X/\sim$ seien disjunkt und abgeschlossen. Dann sind $\pi^{-1}(A), \pi^{-1}(B) \in X$ abgeschlossen und $\pi^{-1}(A) \cap \pi^{-1}(B) = \pi^{-1}(A \cap B) = \varnothing$. Also ist $X \in \mathcal{T}_4$ und es gibt $\pi^{-1}(A) \subset U_1 \subset X$ offen, $\pi^{-1}(B) \subset U_2 \subset X$ und $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. Betrachte $V_\alpha \in U_\alpha, \alpha = 1,2$. $V_\alpha = \{x \in U_\alpha : [x]$ liegt vollständig in $U_\alpha\}$.
Dann gilt $\pi^{-1}(\pi(V_\alpha)) = V_\alpha, \pi^{-1}(A) \subset V_1, \pi^{-1}(B) \subset V_2, \subset \pi(V_1), B \subset \pi(V_2)$.
Zu zeigen ist: $\pi(V_\alpha)$ ist offen in $X/\sim \Leftrightarrow \pi^{-1}(V_\alpha) \in X$ offen in $X \Leftrightarrow V_\alpha \subset X$ ist offen.
Aber: $X \setminus V_\alpha$ ist die Vereinigung aller Äquivalenzklassen, welche $X \setminus U_\alpha$ schneiden.
Also ist $X \setminus U_\alpha \in X$ abgeschlossen. Damit ist auch $X \setminus V_\alpha$ abgeschlossen und V_α offen. □

Beispiel. **1. Spezialfall**: Zusammenziehen eine Teilmenge $A \subseteq X$.

Sei X ein topologischer Raum, $A \subseteq X$ beliebig, $x \sim y \Leftrightarrow x = y \vee x, y \in A$. $X/\sim =: X/A$.

2. Spezialfall Flächen.

Torus (zweidimensional):

$$T^2 = [0,1] \times [0,1]/\sim$$
$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 - x_2, y_1 - y_2 \in \mathbb{Z}$$

Kleinsche Flasche:

$$K^2 = [0,1] \times [0,1]/\sim$$
$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 - x_2, y_1 + y_2 \in \mathbb{Z}$$

3. Spezialfall: Identifikation bei Gruppenwirkung.

Definition 85. Eine *topologische Gruppe* ist eine Gruppe G mit einer Topologie $\mathcal{O}(G)$, so dass

a) $G \times G \ni (g_1, g_2) \mapsto g_1 \circ g_2 \in G$

b) $G \ni g \mapsto g^{-1} \in G$.

stetig sind.

Definition 86. Sei X ein topologischer Raum, G eine topologische Gruppe. Eine *stetige G-Wirkung* auf X ist eine stetige Abbildung $G \times X \ni (g, x) \to g \circ x \in X$ mit

1. $e \circ x = x$
2. $g_1 \circ (g_2 \circ x) = (g_1 \circ g_2) \circ x$

Relationen in X: $x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G : y = g \circ x$. Die Äquivalenzklassen sind die G-Orbits $G \times x$. $X/\sim \, = X/G$.

Beispiel: $X = S^n$ Einheitssphäre, $G = \mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$. $1 \mapsto \mathrm{id}_{S^2}, -1 \mapsto -\mathrm{id}_{S_2}$. $S^n/\mathbb{Z}_2 =$ Menge der eindimensionalen linearen Teilräume des $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

4. Spezialfall Homogene Räume.

Sei G eine topologische Gruppe, $H \leq G$ sei Untergruppe. H wirkt auf G und G/H ist die Menge der Nebenklassen. $g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow \exists h \in H : g_2 = g_1 \circ h \Leftrightarrow g_1^{-1} g_2 \in H$. G/H ist eine topologischer Raum und G wirkt stetig auf G/H transitiv.

Beispiel (STIEFEL-Mannigfaltigkeit): $V_{n,k} = \{(v_1, \dots, v_k) \in (\mathbb{R}^n)^k | \langle v_\alpha, v_\beta \rangle = 0 \text{ für } \alpha \neq \beta\} = SO(n)/SO(n-k)$.

5. Spezialfall: Ankleben von X an Y mittels einer Abbildung $f : X \to Y$.

Seien X, Y topologische Räume, $A \subset X$ beliebig, $f : A \to Y$ stetig.

Wir definieren $X \cup_f Y = (X \cup Y)/\sim$. Identifiziere den Punkt $a \in A$ mit $f(a) \in Y$.

9 CW-Komplexe

Neben den metrischen Räumen betrachten wir nun eine weitere Teilklasse der parakompakten Räume.

Definition 87. Sei $X \in \mathcal{T}_2$. Eine *Zellzerlegung* von X ist eine Familie $\mathcal{E} = \{e_i\}_{i \in I}$ von Teilmengen $e_i \subset X$ mit

Z. 1: $X = \bigcup_{i \in I} e_i, e_i \cap e_j = \varnothing$ falls $i \neq j$.

Z. 2: Jede Menge e_i ist homöomorph zum Inneren einer offenen Kugel $\mathring{D}^{k_i} = \{x \in \mathbb{R}^{k_i} : |x| < 1\}$.

Die Mengen e_i sind die *Zellen* der Zerlegung; $\dim e_i := k_i$.
Das *n-Skelett* ist $X^{(n)} = \bigcup_{\dim e_i \leq n} e_i$.

Z. 3 Es gibt eine stetige Abbildung $\chi_{e_i} : D^{k_i} \to X$ mit

a) $\chi_{e_i}|_{\mathring{D}^{k_i}} : \mathring{D}^{k_i} \to e_i$ ist ein Homöomorphismus.

b) $\chi_{e_i}(S^{k_i-1}) \subset X^{(k_i-1)}$.

χ_{e_i} heißt charakteristische Abbildung von e_i.

Z. 4 Ist e_i eine Zelle, dann gibt es *endlich viele* Zellen $e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}$ mit $\overline{e_i} \subset \bigcup_{\alpha=1}^{k} e_{j_\alpha}$.

Z. 5 Eine Teilmenge $A \subset X$ ist abgeschlossen genau dann, wenn alle Durchschnitte $A \cap \overline{e_j}$ abgeschlossen sind.

CW kommt von *closed finiteness* und *weak topology*.

Beispiel. 1. Die Späre S^n. Der „Nordpol" ist e_0, e_n der Rest. Dann haben wir $\chi_{e_n}(y) = \left(2\sqrt{1-|y|^2}y, 2|y|^2 - 1\right), y \in D^n$.

2. Der Torus T^2 (siehe oben). Wir haben: e_0 sei der „Eckpunkt", e_1^1 und e_2^1 seien die „Randlinien" und e_2 sei die Fläche.

KLEIN'sche Flasche K^2.

Alle Polyeder, Simplizialkomplexe usw. sind CW-Komplexe.

$\mathbb{R}^2$ mit „Kachelung"

9.1 Topologische Eigenschaften von CW-Komplexen.

Satz 88. *Ist e eine k-dimensionale Zelle und $\chi_e : D^k \to X$ charakteristische Abbildung, so gilt $\bar{e} = \chi_e(D^k)$.*

Beweis. Sei $\chi_e : D^k \to X$ charakteristische Abbildung. $\chi_e(\mathring{D}^k) = e \Rightarrow \bar{e} = \overline{\chi_e(\mathring{D}^k)} \supseteq \chi_e(\overline{\mathring{D}^k}) = \chi_e(D^k) \Rightarrow \bar{e} \supseteq \chi_e(D^k)$.
Andererseits: D^k ist kompakt $\Rightarrow \chi_e(D^k)$ ist kompakt $\Rightarrow \chi_e(D^k)$ ist abgeschlossen und enthält $e \Rightarrow \chi_e(D^k) \supseteq \bar{e}$. □

Definition 89 (Teilkomplex)**.** Ist $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E} = \{e_i\}_{i \in i}$ eine Teilmenge von Zellen, so bilden wir $X' = \bigcup_{e \in \mathcal{E}'} e$. $\mathcal{E}'$ heißt *Teilkomplex*, falls $\mathcal{E}'$ eine CW-Zerlegung von X' ist.

Satz 90. *Sei $\mathcal{E}'$ endlich. Dann ist $\mathcal{E}'$ ein CW-Teilkomplex genau dann, wenn $X' \subset X$ abgeschlossen ist.*

Beweis. Sei $\mathcal{E}'$ eine CW-Zerlegung von X'. Jede Zelle $e' \in \mathcal{E}'$ hat eine charakteristische Abbildung $\chi_{e'} : D^k \to X', \overline{e'} = \chi_{e'}(D^k)$. Also $X' = \bigcup_{e' \in \mathcal{E}'} \overline{e'}$. $\mathcal{E}$ ist endlich und $\overline{e'}$ ist abgeschlossen in X, damit ist also auch $X' \subset X$ abgeschlossen.
Umkehrung: Sei $X' \subset X$ abgeschlossen, $e' \in \mathcal{E}', \chi_{e'} : D^k \to X$.
Also: $\overline{e'} = \chi_{e'}(D^k) \subset X'$, weil $e' \subset X'$ und $X' \subset X$ abgeschlossen.
Also $\chi_{e'} : D^k \to X' \subset X$. Z. 1–Z. 5 folgt sofort. □

Satz 91. *Die endliche Vereinigung und der beliebige Schnitt von endlichen Teilkomplexen sind Teilkomplexe.*

Beweis. $(X, \mathcal{E})$ CW-Komplex, $(X_1', \mathcal{E}_1'), (X_2', \mathcal{E}_2')$ zwei endliche Teilkomplexe. Dann sind $X_1', X_2' \subset X$ abgeschlossen, ebenso ihre Vereinigung und ihr Schnitt. Damit sind auch $(X_1' \cap X_2', \mathcal{E}_1' \cap \mathcal{E}_2')$ und $(X_1' \cup X_2', \mathcal{E}_1' \cup \mathcal{E}_2')$ CW-Komplexe. □

Satz 92. *Sei $X = (X, \mathcal{E})$ ein beliebiger CW-Komplex, $e \in \mathcal{E}$ eine Zelle. Dann gibt es immer einen endlichen Teilkomplex $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$, so dass $\bar{e} \subset X'$.*

Beweis. Induktion über $\dim e$.
$\dim e = 0$ trivial.
Es gelte $\dim e = n$. Dann gilt $\bar{e} \setminus e = \chi_e(D^n) \setminus \chi_e(\mathring{D}^n) = \chi_e(S^{n-1}) \subset X^{(n-1)}$. Aus Z. 4 folgt: es existieren nur endlich viele Zellen e_i mit $\dim e_i \leq n-1$ und $(\bar{e} \setminus e) \cap e_i \neq \varnothing$.
Nach IV liegen $\overline{e_i}$ in endlichen Teilkomplexen $\mathcal{E}_i'$ $(1 \leq i \leq k)$.
Damit ist $\mathcal{E}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{E}_k' \cup \{e\}$ ein endlicher Teilkomplex, welcher $e \in \mathcal{E}$ enthält.
Nach Z. 5 ist $A \subset X$ abgeschlossen $\Leftrightarrow$ $A \cap \bar{e}$ abgeschlossen $\Leftrightarrow$ $A \cap X'$ abgeschlossen für jeden endlichen Teilkomplex. □

Satz 93. *$A \subset X$ ist abgeschlossen genau dann, wenn $A \cap X' \subset X$ abgeschlossen für alle Teilkomplexe X'.*

Satz 94. *Sei $(X, \mathcal{E})$ ein CW-Komplex, $K \subset X$ eine kompakte Teilmenge. Dann existiert ein endlicher Teilkomplex $(X', \mathcal{E}') \subset (X, \mathcal{E})$ mit $K \subset X'$.*

Beweis. Sei $K \subset X$ kompakt. Es gelte für $e \in \mathcal{E} : e \cap K \neq \varnothing$. Wähle einen Punkt $K_e \in e \cap K \neq \varnothing$ und betrachte $A := \{K_e | e \in \mathcal{E}, e \cap K \neq \varnothing\}$.

a) A ist abgeschlossene Teilmenge, weil: A ist nach Z. 5 abgeschlossen $\Leftrightarrow$ $A \cap \overline{e^*}$ abgeschlossen für alle $e^* \in \mathcal{E}$. Aber: $\overline{e^*} \subset \bigcup_{i=1}^{k} e_i$. Daraus folgt $A \cap \overline{e^*} \subset \{K_1, \ldots, K_k\}$ ist endlich, d. h. $A \cap \overline{e^*}$ ist endlich.

   Analog: Jede Teilmenge von A ist abgeschlossen, also ist A diskret und K ist kompakt. Damit ist A endlich.

   Damit wird die kompakte Menge K nur von endlich vielen Zellen $e_1, \ldots, e_\ell$ geschnitten und jede dieser Zellen liegt in einem *endlichen* Teilkomplex.

□

Korollar 95. *($K = X$) Ist $(X, \mathcal{E})$ ein CW-Komplex und ist X ein kompakter Raum, so ist $\mathcal{E}$ endlich.*

Satz 96. *Sei $(X, \mathcal{E})$ ein CW-Komplex, $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$ Familie von Zellen, $X' = \bigcup_{e \in E'} e$. TFAE:*

1. *$(X', \mathcal{E}')$ ist CW-Teilkomplex.*

2. *$X' \subset X$ ist abgeschlossen.*

3. *$e \subset X' \Rightarrow \bar{e} \subset X'$.*

Beweis. 2. $\Rightarrow$ 3. und 1. $\Rightarrow$ 3. sind klar.
3. $\Rightarrow$ 2.: $X_{fin} \subset X$ sei endlicher Teilkomplex. Dann hat $X_{fin} \cap X'$ nur endlich viele Zellen $e_1, \ldots, e_r$. Weil X_{fin} eine Teilkomplex ist, folgt mit Bedingung 3.: $\overline{e_i} \subset X_{fin} \cap X'$. Also ist $X_{fin} \cap X' = \bigcup_{i=1}^{r} \overline{e_i}$. Damit ist $X_{fin} \cap X'$ abgeschlossen. Es folgt mit Satz 93: $X' \subset X$ abgeschlossen.
3. $\Rightarrow$ 1.: Analog. $\square$

Beispiel. Sei $(X, \mathcal{E})$ CW-Komplex. $\mathcal{E}^{(n)}$ sei die Vereinigung aller Zellen e mit $\dim e \leq n$, $X^{(n)} = \bigcup_{e \in \mathcal{E}^{(n)}} e$. Dann ist $(X^{(n)}, \mathcal{E}^{(n)})$ auch ein CW-Komplex.

Satz 97 (Satz der Topologie)**.** *Alle CW-Komplexe sind parakompakt.*

10 Fundamentalgruppe und Überlagerungen

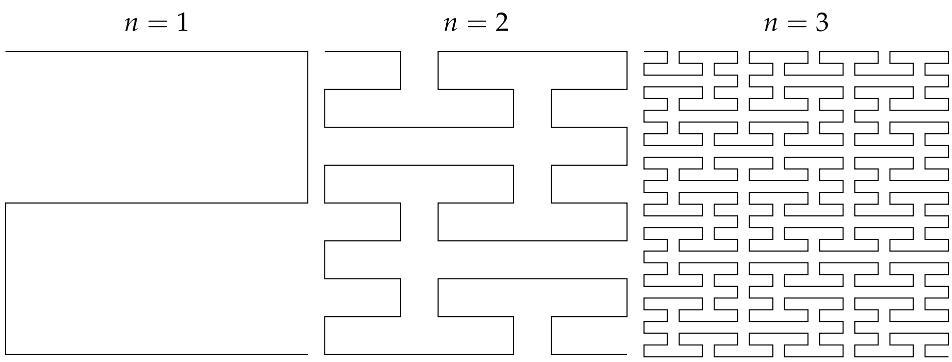
10.1 Allgemeine Eigenschaften

Definition 98. Sei X ein topologischer Raum, $x_0, x_1 \in X$. Ein *Weg* von x_0 nach x_1 ist eine stetige Abbildung $\omega : [0,1] \to X$ mit $\omega(0) = x_0$ und $\omega(1) = x_1$.

Bemerkung. Der Weg ist *nicht* die Bildmenge $\omega([0,1]) \subset X$!

Beispiel. Es gibt eine surjektive, stetige Abbildung $\omega : [0,1] \to [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$, die PEANO-Kurve. Diese ist raumfüllend, also $\omega([0,1]) = [0,1] \times [0,1]$

Abbildung 1: PEANO-Kurve



Definition 99. Zwei Wege $\omega_1, \omega_2 : [0,1] \to X$ mit $\omega_1(0) = \omega_2(0) = x_0$ und $\omega_1(1) = \omega_2(1) = x_1$ nennen wir *homotop*, falls eine stetige Abbildung $F : [0,1]^2 \to X$ existiert mit $F(s,0) = \omega_0(s), F(s,1) = \omega_1(s), F(0,t) = x_0, F(1,t) = x_1$.
Weiterhin bezeichnen wir $\Omega(X, x_0, x_1) = \{\text{Wege von } x_0 \text{ nach } x_1 \text{ in } X\}$

Satz 100. *Die Homotopie von Wegen ist eine Äquivalenzrelation in $\Omega(X, x_0, x_1)$.*

a) $\omega \sim \omega$ *weil* $F(s,t) = \omega(s)$ *für alle* $t \in [0,1]$.

b) $\omega_1 \sim \omega_2 \Leftrightarrow \omega_2 \sim \omega_1$, *weil* $F^*(s,t) := F(s, 1-t)$ *eine Homotopie von* ω_2 *nach* ω_1 *ist.*

c) $\omega_1 \sim \omega_2, \omega_2 \sim \omega_3 \Rightarrow \omega_1 \sim \omega_3$. *Seien* F_1, F_2 *die Homotopien von* ω_1 *nach* ω_2 *bzw. omega*$_2$ *nach* ω_3. *Wir definieren* $F : [0,1]^2 \to X$

$$F(s,t) = \begin{cases} F_1(s, 2t) & \text{für } t \leq \frac{1}{2} \\ F_2(s, 2t-1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Definition 101 (Zusammensetzen von Wegen)**.** Seien $\sigma, \tau : [0,1] \to X$ Wege von x_0 nach x_1 bzw. x_1 nach x_2. Wir definieren

$$\sigma * \tau : t \mapsto \begin{cases} \sigma(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \tau(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Satz 102. *Seien* σ, σ_1 *homotope Wege von* x_0 *nach* x_1 *und* τ, τ_1 *homotope Wege von* x_1 *nach* x_2. *Dann sind die Wege* $\sigma * \tau$ *und* $\sigma_1 * \tau_1$ *auch homotop.*

Definition 103. Wir belegen die Klassen der Wege $\pi_1(X, x_0) = \Omega(X, x_0, x_0)/\sim$ mit der Multiplikation $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0), ([\sigma], [\tau]) \mapsto [\sigma * \tau]$.

Satz 104 (Fundamentalgruppe von X and der Stelle $x_0 \in X$)**.** $(\pi_1(X, x_0), \cdot)$ *ist eine (i. A. nicht abelsche) Gruppe.*

Beweis.

1. Der konstante Weg $\sigma_0 \equiv x_0$ ist das neutrale Element.
2. Sei $\sigma \in \Omega(X, x_0, x_0)$. Definiere $\sigma^{-1}(s) = \sigma(1-s)$.
3. Die Operation ist assoziativ.

Detaillierter Beweis abhängig von der aktuellen Temperatur im siebtem Kreis der Hölle. Wurden in erster Linie als Bild ausgeführt. □

Satz 105. *Die stetige Abbildung* $f : X \to Y, f(x_0) = y_0$ *induziert einen Gruppenhomomorphismus* $f_\# : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ *durch* $f_\#[\sigma] := [f \circ \sigma]$. *Dann gilt* $(g \circ f)_\# = g_\# \circ f_\#$.

Korollar 106. *Die Zuordnung* $f \mapsto f_\#$ *ist ein* kovarianter Funktor *aus der Kategorie der punktierten topologischen Räume in die Kategorie der Gruppen.*

Definition 107. $f, g : X \to Y$ stetige Abbildungen. f und g nennt man *homotop*, falls eine stetige Abbildung $F : X \times [0,1] \to Y$ mit $F(x,0) = f(x), F(x,1) = g(x)$ existiert.

Satz 108 (Änderung des Basespunktes in $\pi_1(X, x_0)$)**.** *Sei* $\alpha : [0,1] \to X$ *eine Weg von* x_0 *und* x_1. *Wir definieren* $h_\alpha : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0), [\sigma] \mapsto [\alpha^{-1} * \sigma * \alpha]$. *Dann ist* h_α *ein Gruppenhomomorphismus.*

Beweis. $h_\alpha([\sigma] \cdot [\tau]) = h_\alpha[\sigma * \tau] = [\alpha^{-1} * \sigma * \tau * \alpha] = [\alpha^{-1} * \sigma * \alpha * \alpha^{-1} * \tau * \alpha] = [(\alpha^{-1} * \sigma * \alpha) * (\alpha^{-1} * \tau * \alpha)] = [\alpha^{-1} * \sigma * \alpha] \cdot [\alpha^{-1} * \tau * \alpha] = h_\alpha[\sigma] \cdot h_\alpha[\tau]$. □

Satz 109. *Seien $f, g : X \to Y$ homotope Abbildungen, $x_0 \in X$. Wir erhalten einen Weg zwischen $f(x_0)$ und $g(x_0)$, nämlich $\alpha(t) = F(x_0, t)$. Dann ist $h_\alpha \circ f_\# = g_\#$.*

Beweis.

$$
\begin{aligned}
& & h_\alpha \circ f_\# &= g_\# \\
\Leftrightarrow & & \forall \beta \in \pi_1(X, x_0) : h_\alpha(f_\#(\beta)) &= g_\#(\beta) \\
\Leftrightarrow & & \forall \omega \in \Omega(X, x_0, x_0) : [\alpha^{-1} * (f \circ \omega) * \alpha] &= [g \circ \omega] \\
\Leftrightarrow & & \forall \omega \in \Omega(X, x_0, x_0) : [F(x_0, 1 - \cdot) * F(\omega(\cdot), 0) * F(x_0, \cdot)] &= [F(\omega(\cdot), 1)]
\end{aligned}
$$

Jetzt können wir eine Homotopie angeben:

$$
G(s,t) = \begin{cases} F(x_0, 1 - 3s) & 0 \leq 3s \leq 1 - t \\ F(\omega(\frac{3s - 1 + t}{1 + 2t}), t) & 1 - t \leq 3s \leq 2 + t \\ F(x_0, 3s - 2) & 2 + t \leq 3s \leq 3 \end{cases}
$$

□

Bemerkung.
1. x_0, x_1 in der gleichen Wegzusammenhangskomponente von X, dann sind die Gruppen $\pi(X, x_0), \pi(X, x_1)$ isomorph.
2. $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ induziert $f_\# : \pi(X, x_0) \to \pi(Y, y_0)$.
3. $f \sim g \Rightarrow f_\# = g_\#$

Definition 110 (homotopieäquivalent)**.** Zwei topologische Räume X, Y heißen *homotopieäquivalent*, falls es stetige Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ gibt, sodass $f \circ g \sim \mathrm{id}_Y$ und $g \circ f \sim \mathrm{id}_X$.

Satz 111. *Sind X und Y homotopieäquivalent, so sind $\pi_1(X)$ und $\pi_2(Y)$ isomorph.*

10.2 Der Fall $X = G$ und $x_0 = e$

Seien $\sigma, \tau : [0, 1] \to G$ geschlossene Wege in $e \in G$. Dann ist $(\sigma \cdot \tau)(t) = \sigma(t)\tau(t)$ ein geschlossener Weg in $e \in G$.

Lemma 112. *Sei X eine beliebige Menge mit zwei Operationen $*, \odot$ und gelte*

1. *Es gibt ein gemeinsames neutrales Element $e \in X$ für beide Operationen und*
2. $(x_1 * x_2) \odot (y_1 * y_2) = (x_1 \odot y_1) * (x_2 \odot y_2)$

Dann sind die beiden Operationen identisch und kommutativ.

Beweis. $x * y = (x \odot e) * (y \odot e) \overset{2.}{=} (x * e) \odot (e * y) = x \odot y$
$y * x = (e \odot y) * (x \odot e) \overset{2.}{=} (e * x) \odot (y * e) = x \odot y$
$\Rightarrow x * y = y * x$ □

Satz 113. *Sei G topologische Gruppe, $x_0 = e$. Dann ist $\pi_1(G) = \pi_1(G, e)$ eine abelsche Gruppe und die Gruppenoperation ist gegeben durch $[\sigma(t)] \cdot [\tau(t)] = [(\sigma * \tau)(t)] = [\sigma(t) \cdot \tau(t)]$.*

Beweis. In $\pi_1(G, e)$ haben wir zwei Operationen $[\sigma * \tau]$ und $[\sigma \cdot \tau]$. Der konkrete Weg $\tau_0(t) \equiv e$ ist das gemeinsame neutrale Element.
Zu zeigen ist: $(\sigma_1 * \sigma_2) \cdot (\tau_1 * \tau_2) \sim (\sigma_1 \cdot \tau_1) * (\sigma_2 \cdot \tau_2)$
Dies ist offensichtlich, da die Gruppenoperation punktweise durchgeführt wird.
Mit dem Lemma folgt also, dass $*$ und $\cdot$ in $\pi_1(G)$ gleich sind und die Gruppe abelsch ist. $\square$

10.3 Berechnung von $\pi_1(X)$

1. $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}, S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

2. VON-KAMPEN-Satz

Zum ersten Punkt:
Erinnerung: $\log(z)$ läßt sich nicht stetig auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ definieren, aber auf $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.
Sei $f : X \to S^1$ stetig. Wann existiert ein Logarithmus, d. h. eine stetige Abbildung $F : X \to \mathbb{R}^1$ mit $f(x) = e^{2\pi i F(x)}$ $\forall x \in X$?

Satz 114. *Sei $X \subset R^n$ eine kompakte, sternförmige Menge in $\mathbb{R}^n$. Dann hat jede stetige Abbildung $f : X \to S^1$ einen Logarithmus*

Beweis. Sei $f : X \to S^1$ stetig. Da auch X kompakt, ist f gleichmäßig stetig, also $\exists \varepsilon > 0 : \forall x, x' \in X : |x - x'| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x')| < 2$. X ist kompakt, also insbesondere beschränkt, also gibt es M, so dass $\forall x \in X : |x| \leq M$.
Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{M}{n} < \varepsilon$, somit $\frac{|x|}{n} < \varepsilon$ für alle $x \in X$.
O. B. d. A. sei X sternförmig bzgl. $0 \in \mathbb{R}^n$. $\square$

Sei $\sigma : I = [0, 1] \to S^1$ ein geschlossener Weg in $1 \in S^1$. I ist sternförmig und kompakt in $\mathbb{R}^1$. Also existiert ein Logarithmus $\Sigma : I \to \mathbb{R}^1$ mit $\sigma(t) = e^{2\pi i \Sigma(t)}, t \in I$. Wegen $\sigma(1) = 1$ folgt $e^{2\pi i \Sigma(1)} = 1 \Rightarrow \Sigma(1) \in \mathbb{Z}$. Dies nennen wir Umlaufzahl oder Index des geschlossenen Weges:

Definition 115 (Index / Umlaufzahl)**.** Index$(\sigma) := \Sigma(1) \in \mathbb{Z}$

Eigenschaften

1. $\sigma \sim \tau \Rightarrow$ Index$(\sigma) =$ Index(τ)

2. Index : $\pi_1(S^1, 1) \to \mathbb{Z}$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

3. Index ist surjektiv.

Satz 116. Index : $\pi_1(S^1, e) \to \mathbb{Z}$ *ist injektiv. Insgesammt ergibt sich also* $\pi_1(S^1, e) \simeq \mathbb{Z}$.

Satz 117 (Anwendung). *Fixpunktsatz in Dimension* 2
Sei $f : \overline{D}^2 \to \overline{D}^2$ *stetig. Dann existiert ein Punkt* $x_0 \in \overline{D}^2$ *mit* $f(x_0) = x_0$.

Satz 118 (VAN-KAMPEN-Theorem). *Sei X ein topologischer Raum, $X_1, X_2 \subset X$ wegzusammenhängende Mengen mit $X_1 \cup X_2 = X$. Weiterhin sei $X_1 \cap X_2$ wegzusammenhängend und $x_0 \in X_1 \cap X_2$. $i^1 : X_1 \cap X_2 \to X_1, i^2 : X_1 \cap X_2 \to X_2, j^1 : X_1 \to X, j^2 : X_2 \to X$.*

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(X_1, x_0) \arrow[dr, "j^1_\#"] & \\ \pi_1(X_1 \cap X_2, x_0) \arrow[ur, "i^1_\#"] \arrow[dr, "i^2_\#"] & & \pi_1(X, x_0) \\ & \pi_1(X_2, x_0) \arrow[ur, "j^2_\#"] & \end{tikzcd}$$

Dann gilt:

a) $\operatorname{im}(j^1_\#)$ *und* $\operatorname{im}(j^2_\#)$ *erzeugen* $\pi_1(X)$

b) Ist H eine beliebige Gruppe und $\psi_1 : \pi_1(X_1) \to H, \psi_2 : \pi(X_2) \to H, \psi_0 : \pi_1(X_1 \cap X_2) \to H$ Gruppenhomomorphismen derart, dass das entstehende Diagramm kommutiert, so gibt es genau einen Homomorphismus $\lambda : \pi_1(X) \to H$ derart, dass das entstehende Diagramm kommutiert.

Beweisidee. $\gamma \in \pi_1(X)$. □

Beispiel. 1. Spezialfall: $\pi_1(X_1) = \{e\} = \pi_1(X_2) \Rightarrow \pi_1(X) = \{e\}$.

Beispiel: $X = S^n, n \geq 2, X_1 = D^n_+, X_2 = D^n_-, X_1 \cap X_2 = S^{n-1}$. Aber $\pi_1(X_1) = \pi_1(X_2) = \{e\}$.

Konsequenz: $\pi_1(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 1 \\ 0 & n \geq 2 \end{cases}$

2. Spezialfall: $\pi_1(X_1 \cap X_2) = \{e\}$. Dann folgt $\pi_1(X) = \pi_1(X_1) * \pi_1(X_2)$.

Beispiel: X sei Lemniskate, X_1, X_2 jeweils die Hälften inklusive Kreuzungspunkt. $\pi_1(X) = \pi_1(S^1) * \pi_1(S^1) =$ freie Gruppe erzeugt von a, b (die Windungen).

3. Spezialfall: $\pi_1(X_2) = \{e\}$. Teil a) des VAN-KAMPEN-SATZES gibt uns $j^1_\# : \pi_1(X_1) \to \pi_1(X)$ ist surjektiv und mit dem Homomorphiesatz folgt $\pi_1(X) = \pi_1(X_1) / \ker(j^1_\#)$.

Beispiel: $\pi_1(T^2) = \pi_1(S^1 \times S^1)$

Allgemein: $\pi_1(X \times Y) = \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$

10.4 Überlagerungen

Definition 119. Eine stetige Abbildung $p : E \to X$ heißt *Überlagerung*, falls jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung $x \in U_x \subset X$ mit folgender Eigenschaft besitzt:

$$p^{-1}(U_x) = \bigcup_{i \in I} \tilde{U}_i, i \neq j \Rightarrow \tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j = \varnothing, \tilde{U}_i \subset X \text{ offen}$$

und *jede* Einschränkung $p|_{\tilde{U}_i} : \tilde{U}_i \to U_x$ ist ein Homöomorphismus.
Man bezeichnet E als *Totalraum* und X als *Basis* der Überlagerung.

Beispiel. $E = \mathbb{R}^1, X = S^1, p(t) = e^{2\pi i t}$ ist unendliche Überlagerung.

Definition 120. X topologischer Raum, G Gruppe und wirke stetig auf X. G wirkt *diskontinuierlich*, falls es für alle $x \in X$ ein $x \in U_x$ gibt, so dass für alle $g \neq e$ gilt: $U_x \cap g(U_x) = \varnothing$. Insbesondere wirkt G fixpunktfrei.

Beispiel. $E = \mathbb{R}^1, G = \mathbb{Z}, (n,t) \mapsto n + t$ ist eine diskontinuierliche $\mathbb{Z}$-Wirkung auf $\mathbb{R}^1$.

Satz 121. *Wirkt G diskontinuierlich auf X, so ist die Projektion $p : X \to X/G$ eine Überlagerung.*

Beweis. Zur Erinnerung: $W \subset X/G$ offen $\Leftrightarrow p^{-1}(W) \subset X$ offen.
Weiterhin gilt: $A \subset X \Rightarrow p^{-1}p(A) = \bigcup_g g(A)$.
Konsequenz: Ist $A \subset X$ offen, dann ist auch $\bigcup_g g(A)$ offen, also auch $p^{-1}p(A)$ und damit $p(A) \subset X/G$.
Damit ist $p : X \to X/G$ eine offene Abbildung, d. h. Bilder offener Mengen sind offen.
Sei $G \cdot x_0 \in X/G$ mit $x_0 \in X$ ein Punkt aus X/G. G wirkt auf X diskontinuierlich, d. h. zu $x_0 \in X$ gibt es eine offene Umgebung U_{x_0} mit $U_{x_0} \cap g(U_{x_0}) = \varnothing, g \neq e$. Betrachte $V_{G \cdot x_0} := p(U_{x_0})$. Weil p eine offene Abbildung ist, wird $V_{G \cdot x_0} \subset X/G$ eine offene Umgebung von $G \cdot x \in X/G$ sein.
Aber: $p^{-1}(V_{G \cdot x_0}) = p^{-1}p(U_{x_0}) = \bigcup_g g(U_{x_0})$ sind disjunkt. □

Korollar 122. *Sei G endlich und wirke fixpunktfrei auf X. Dann ist $X \to X/G$ eine endliche Überlagerung.*

Beispiel. $X = S^n, G = \mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}, (-1)x = -x, x \in S^n$. $S^n \to S^n/\mathbb{Z} = \mathbb{P}^n$

Beispiel (Linsenräume). $S^{2n+1} \subset {}^{.n+1} \simeq \mathbb{R}^{2n+2}$. Sei p eine Primzahl, $q_1, \ldots, q_{n+1}$ natürliche Zahlen mit $(p, q_i) = 1 \forall i$.
$\mathbb{Z}_p = \omega \in \mathbb{C} : \omega^p = 1$
Wirkung von $\mathbb{Z}_p$ auf S^{2n+1}: $\omega_p \cdot (z_1, \ldots, z_{n+1}) = (z_1, z_2 \cdot e^{2\pi i \frac{q_1}{p}}, z_3 \cdot e^{2\pi i \frac{q_2}{p}}, \ldots)$. Wegen $(p, q_i) = 1$ ist diese Wirkung fixpunktfrei.
$L(p, q_1, \ldots, q_{n+1}) = S^{2n+1}/\mathbb{Z}_p$ nennt man Linsenräume. Sie besitzen eine endliche Überlagerung und sind unter Permutation der q_i invariant. Ist $L(p, q_1, \ldots, q_{n+1}) \simeq L(p^*, q_1^*, \ldots, q_{n+1}^*)$, so ist $p = p^*$ und die q_i^* eine Permutation der q_i.

Definition 123. Wir bezeichnen $p^{-1}(x_0) \in E$ als *Faser* über $x_0 \in X$.
Seien $p_1 : E_1 \to X, p_2 : E_2 \to X$ zwei Überlagerungen. Wir nennen sie äquivalent $(E_1, p_1) \sim (E_2, p_2) \Leftrightarrow \exists \varphi : E_1 \to E_2$ Homöomorphismus, so dass $p_2 \circ \varphi = p_1$.

Hauptfrage: Gegeben ein zusammenhängender Raum X, wieviele Überlagerungen hat X.
Antwort: $p : E \to X$ Überlagerung; E, X wegzusammenhängend. p induziert $p_\# : \pi_1(E) \to \pi_1(X)$

1. Jeder Überlagerung $p : E \to X$ wird die Untergruppe $p_\#(\pi_1(E)) \subset \pi_1(X)$ zugeordnet

2. Äquivalente Überlagerungen geben konjugierte Untergruppen $(p_1)_\#(\pi_1(E_1))$ und $(p_2)_\#(\pi_1(E_2))$ in $\pi_1(X)$

3. $\{$Menge der Überlagerungen von $X\} \ni [(E, p)] \to$ Familie zueinander konjugierter Untergruppen von $\pi_1(X)$

4. Die Abbildung in 3.) ist bijektiv.

Definition 124. Sei X wegzusammenhängend. Es gibt, bis auf Äquivalenz, genau eine zusammenhängende Überlagerung $p : E_{univ} \to X$ mit $\pi_1(E_{univ}) = \{0\}$. Wir nennen sie *universelle Überlagerung* von X.

Satz 125 (Eindeutigkeit der Hebung)**.** *Sei $p : E \to X$ eine Überlagerung, $e_0 \in E, x_0 = p(e_0)$. Weiterhin sei Y ein zusammenhängender Raum, $y_0 \in Y$. Sei $f : Y \to X$ stetig mit $f(y_0) = x_0$. Dann gibt es höchstens eine Hebung $\tilde{f} : (Y, y_0) \to (E, e_0)$ mit $p \circ \tilde{f} = f$.*

Beweis. Seien $\tilde{f}, \tilde{\tilde{f}}$ zwei Hebungen. Definiere $A := \{y \in Y : \tilde{f}(y) = \tilde{\tilde{f}}(y)\}$ und $B := \{y \in Y : \tilde{f}(y) \neq \tilde{\tilde{f}}(y)\}$.

1. $A \dot{\cup} B = Y$

2. $y_0 \in A, A \neq \varnothing$

3. A ist abgeschlossen und B offen in Y.

Es genügt zu zeigen, dass A offen in Y, damit also $A = Y$ und somit $\tilde{f} = \tilde{\tilde{f}}$.
Sei $y \in A$ ein beliebiger Punkt, dann ist $\tilde{f}(y) = \tilde{\tilde{f}}(y)$. Betrachte $x := f(y) = p\tilde{f}(y) = p\tilde{\tilde{f}}(y)$. Weil p Überlagerung ist, gibt es $x \in U_x \subset X$ mit $\tilde{f}(y) = \tilde{\tilde{f}}(y) \in p^{-1}(U_x) = \bigcup_i U_i, U_i \subset E$ offen. Damit gibt es genau eine Menge U_{i_0} mit $\tilde{f}(y) = \tilde{\tilde{f}}(y) \in U_{i_0}$. Damit ist $\tilde{f} = \tilde{\tilde{f}}(y)$ auf $\tilde{f}^{-1}(U_{i_0}) \cap \tilde{\tilde{f}}^{-1}(U_{i_0})$, also $y \in \tilde{f}^{-1}(U_{i_0}) \cap \tilde{\tilde{f}}^{-1}(U_{i_0}) \subset A$. □

Satz 126 (Hebung von Wegen)**.** *$p : (E, e_0) \to (X, x_0)$ wie oben. Sei $\omega : [0, 1] \to X$ ein Weg mit $\omega(0) = x_0$. Dann gibt es genau einen Weg $\tilde{\omega} : [0, 1] \to E$ mit $\tilde{\omega}(0) = e_0$ und $p \circ \tilde{\omega} = \omega$*

Beweis. Wegen der Kompaktheit von $[0, 1]$ gibt es endlich viele offene Megen $U_1, \ldots, U_k$ mit

1. $\omega([0, 1]) \subset \bigcup U_i$
2. $p^{-1}(U_i) = \bigcup_j \hat{U}_{i,j}, \hat{U}_{i,j} \subset E$ offen.

Zerlege $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ derart, dass $\omega([t_{\alpha-1}, t_\alpha]) \subset U_i$ für genau ein U_i.
$0 = t_0 : \omega(t_0) = x_0 \subset U_1, e_0 \in p^{-1}(U_1) = \bigcup_j \hat{U}_{i,j} \Rightarrow \exists! j : e_0 \in \hat{U}_{i,j}$ usw. □

Bemerkung. Die Hebung eines geschlossenen Weges $\omega[0, 1] \to X$ in X ist im Allgemeinen *kein* geschlossener Weg in E.

Satz 127 (Hebung von Homotopien). *Sei*

- *$p : E \to X$ eine Überlagerung,*
- *Y ein topologischer Raum,*
- *$f : Y \to X$ stetig,*
- *$\tilde{f} : Y \to E$ eine gegebene Hebung von f, d. h. $f = p \circ \tilde{f}$*
- *und $F : Y \times I \to X$ eine gegebene Homotopie in der Basis, $F(y, 0) = f(y)$.*

Dann gibt es genau eine Homotopie $\tilde{F} : Y \times I \to E$ mit

1. *$p \circ \tilde{F} = F$*
2. *$\tilde{F}(y, 0) = \tilde{f}(y)$*

Beweis. (Beweis durch Bild)

- $\tilde{F}(y_0, t_0)$
- $F(y_0, t)$ ist Weg in t, diesen Weg hebt man mit $\tilde{F}(y_0, 0) = \tilde{f}(y_0)$. Dann ergibt sich $\tilde{F}(y_0, t_0)$ automatisch.

□

GENERELLE VORAUSSETZUNGEN: X, E wegzusammenhängend, $p : (E, e_0) \to (X, x_0)$.

Satz 128. *Der induzierte Homomorphismus $p_\# : \pi_1(E, e_0) \to \pi_1(X, x_0)$ ist injektiv.*

Beweis. Sei $[\omega] \in \pi_1(E, e_0)$ und gelte $p_\#[\omega] = 1$. Dann ist die Projektion nach „unten“ $p\omega : I \to X$ homotop zum konstanten Weg χ_0, also $p \circ \omega \sim \chi_0$. Die Homotopie zwischen $p\omega(t)$ und χ_0 hebt sich zu einer Homotopie mit $\omega(t)$ als Anfang und konstantem Weg e_0.
Damit ist $\omega(t) \sim e_0$, also ist die von ω repräsentierte Klasse das neutrale Element in der Fundamentalgruppe, d. h. $[\omega] = 1$. □

Sei $x_0 \in X, e_0 \in E, p(e_0) = x_0$ und $E_{x_0} = p^{-1}(x_0) \subset E$ die Faser über x_0. Wir konstruieren eine Wirkung von $\pi_1(X, x_0)$ auf der Menge E_{x_0}.

- Seien $[\omega] \in \pi_1(X, x_0)$ und $e_0 \in E_{x_0}$ gegeben, so betrachten wir die eindeutige Hebung $\tilde{\omega}$ von ω mit $\tilde{\omega}(0) = e_0$ und definieren $[\omega]e_0 := \tilde{\omega}(1)$.

- Diese Wirkung ist korrekt definiert, denn:

  Sind $[\omega] = [\omega_1]$ homotope Wege, so heben wir die Homotopie aus X nach E. Dann sind $\tilde{\omega}, \tilde{\omega_1}$ homotop und $\tilde{\omega}(1) = \tilde{\omega_1}(1)$, also kann der gehobene Weg nicht an einer anderen Stelle enden, da Fasern diskret sind und x_0 in der Homotopie nicht bewegt wird.

- Die Wirkung von $\pi_1(X, x_0)$ auf E_x ist transitiv, weil E wegzusammenhängend ist. Für $e_0, e_1 \in E_x$ wähle einen Weg η von e_0 nach e_1, dann ist $[p\eta] \in \pi_1(X, x_0)$ und $[p\eta] \cdot e_0 = e_1$.

- Isotropiegruppe der $\pi_1(X, x_0)$-Wirkung eines Punktes $e_0 \in E$

  Gelte: $[\omega] \cdot e_0 = e_0, [\omega] \in \pi_1(X, x_0)$ aus $[\omega] \cdot e_0 = e_0$ folgt, dass $\tilde{\omega}(t)$ ein geschlossener Weg in e_0 ist, d. h. $[\tilde{\omega}] \in \pi_1(E, e_0)$. Somit ist $p_\#[\tilde{\omega}] = [\omega]$.

  Konsequenz: Die Isotropiegruppe von e_0 ist $\mathrm{im}(p_\# : \pi_1(E, e_0) \to \pi_1(X, x_0))$.

Satz 129. *Sind E, X wegzusammenhängend, $p : E \to X$ Überlagerung, $e_0 \in E$ mit $x_0 = p(e_0)$, dann gilt: $E_{x_0} \hat{=} \pi_1(X, x_0)/p_\#(E, e_0)$,*
die Faser über x_0 ist die Menge aller Restklassen von $\pi_1(X, x_0)$ modulo der Untergruppe $p_\#(\pi_1(E, e_0))$.

Beispiel. $n \geq 2, \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \sigma^2/\{\pm 1\}$
Die Anzahl der Elemente in der Faser der Überlagerung $S^2 \to \mathbb{P}^n$ ist $2 = |E_{x_0}|$. Aber $\pi_1(S^n) = 0$ ist trivial, weil $n \geq 2$, also ist $\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))$ eine Gruppe mit 2 Elementen: $\pi_1(\mathbb{P}^n)) = \mathbb{Z}_2$.

10.4.1 Allgemeines Hebungsproblem

$$\begin{array}{ccc} & & (E, e_0) \\ & ?\exists \tilde{f} \nearrow & \downarrow p \\ (Y, y_0) & \xrightarrow{f} & (X, x_0) \end{array}$$

Frage: Wann existiert eine Hebung $\tilde{f}$ mit $\tilde{f}(y_0) = e_0$ von f? (Wenn sie existiert, ist sie eindeutig.)
Angenommen, $\tilde{f}$ existiert derart, dass obiges Diagramm kommutiert. Dann kommutiert auch

$$\begin{array}{ccc} & & \pi_1(E, e_0) \\ & \exists \tilde{f}_\# \nearrow & \downarrow p_\# \\ \pi_1(Y, y_0) & \xrightarrow{f_\#} & \pi_1(X, x_0) \end{array}$$

Daher ist $\mathrm{im} f_\# \subset \mathrm{im} p_\#$ Bedingung an f.

Satz 130. *$f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ besitzt eine Hebung genau dann, wenn $\mathrm{im}(f_\# : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, x_0)) \subset \mathrm{im}(p_\# : \pi_1(E, e_0) \to \pi_1(X, x_0)) \simeq \pi_1(E, e_0) < \pi_1(X, x_0)$ Untergruppe.*

Beweis. „$\Leftarrow$" siehe Herleitung.
„$\Rightarrow$": Später ☐

10.5 Die Gruppe der Decktransformation

Im folgenden sei $p : E \to X$ eine Überlagerung und E, X wegzusammenhängend.

Definition 131. Eine *Decktransformation* ist eine Homöomorphismus $f : E \to E$ mit $p \circ f = p$. $\mathrm{Deck}(E \overset{p}{\to} X)$ eine Gruppe.

- $e_0 \in E, x_0 = p(e_0)$ man schreibt dafür auch E_{x_0}
  $p \circ f(e_0) = p(e_0) = x_0 \Rightarrow f(e_0) \in E_{x_0}$. Jede Decktransformation bildet jede Faser in sich selbst ab (auch bijektiv).

- $\mathrm{Deck}(E \overset{p}{\to} X \ni f \overset{\psi}{\to} f(e_0) \in E_{x_0}) = \pi_1(X, x_0)/p_\#(\pi_1(E, e_0))$. Dies ist im allgemeinen kein Gruppe.

Wir wollen hier einen Gruppenisomorphismus finden, das führt uns auf ...

Satz 132. *Die angegebene Abbildung ψ induziert den folgenden Gruppenisomorphismus:*

$$\mathrm{Deck}(E \overset{p}{\to} X) \simeq \frac{N(p_\#(\pi_1(E, e_0)))}{p_\#(\pi_1(E, e_0))}$$

Dabei ist N der Normalisator, also für eine Gruppe G und eine Untergruppe $H \leq G$ ist $N(H) := \{g \in G | gHg^{-1} = H\}$. Wir wissen aus der Linearen Algebra, dass $G > N(H) \trianglerighteq H$, also ist $N(H)/H$ eine Gruppe.

Definition 133. X ist einfach zusammenhängend, falls

1. X wegzusammenhängend und
2. $\pi_1(X, x_0) =$ ist die triviale Gruppe.

10.5.1 Anwendungsbeispiele des Satzes

X sei einfach zusammenhängend und G wirke diskontinuierlich auf X, dann ist $p : X \to X/G$ eine Überlagerung und es gilt: $\pi_1(X/G) = G$.

Beweis. Zu jedem $g \in G$ gehört ein $L_g : X \to X$ mit $L_g(x) := gx$. Außerdem gilt

$$\begin{array}{ccc} X & \overset{L_g}{\to} & X \\ & p \searrow & \downarrow p \\ & & X/G \end{array}$$

Andererseits: Sei $f : X \to X$ eine Decktransformation

$$\begin{array}{ccc} X & \overset{f}{\to} & X \\ & \searrow & \downarrow \\ & & X/G \end{array}$$

d. h. für gegebenes $x \in X$ liegt $f(x)$ im selben G-Orbit wie x. Also ist für $g_x \in G$ $f(x) = g_x - x$.
Wähle nun $x_0 \in X$ und ein $g_{x_0} = L_{g_{x_0}}(e)$; f und $L_{g_{x_0}}$ sind in Deck$(X \to X/G)$ und $L_{g_{x_0}}$. Da Hebungen eindeutig sind (Decktransformationen sind Hebungen der Identität) gilt $L_{g_0} = f$.
Mit dem vorherigen Satz erhalten wir also

$$G \simeq \text{Deck} = N(\{e\})/\{e\} = \pi_1(X/G)$$

□

Bemerkung. Zwei Decktransformationen sind gleich genau dann, wenn sie an *einer* Stelle gleich sind.

Betrachte Überlagerung $p : (E, e_0) \to (X, x_0)$ und die Faser $E_{x_0} = p^{-1}(x_0)$. $\pi_1(X, x_0)$ wirkt transitiv auf E_{x_0}, also $E_{x_0} \simeq \frac{\pi_1(X,x_0)}{p_\#(\pi_1(E,e_0))}$ als Menge.
Eine Decktransformation ist eine Hebung von $p : E \to X$.
Konsequenz: $f_1 \equiv f_2$, falls f_1 und f_2 an wenigstens einer Stelle übereinstimmen.
$Deck(E \to X) \ni f \mapsto f(e_0) \in E_{x_0} = \frac{\pi_1(X,x_0)}{p_\#(\pi_1(E,e_0))}$

Beweis. zu Satz 132

Schritt 1: $f \in Deck \Rightarrow \psi(f) \in N(p_\#(\pi_1(E, x_0)))$. Sei $\tilde{\omega}$ eine Weg in E von e_0 nach $f(e_0)$. Dann kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(E, e_0) & \overset{h_{\tilde{\omega}}}{\to} & \pi_1(E, f(e_0)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(X, x_0) & \overset{h_{p\circ\tilde{\omega}}}{\to} & \pi_1(X, x_0) \end{array}$$

Berechne:

$$\begin{aligned} h_{p\circ\tilde{\omega}}(p_\#(\pi_1(E, e_0))) = h_{p\circ\tilde{\omega}} p_\# f_\#^{-1}(\pi_1(E, f(e_0))) &= h_{p\circ\tilde{\omega}} p_\#(\pi_1(E, f(e_0))) \\ &= p_\# h_{\tilde{\omega}}(\pi_1(E, f(e_0)) = p_\#(\pi_1(E, e_0)) \end{aligned}$$

Also ist $h_{p\circ\tilde{\omega}}(p_\#\pi_1(E, e_0)) = p_\#\pi_1(E, e_0)$, also ist die Untergruppe $p_\#\pi_1(E, e_0) \subset \pi_1(X, x_0)$ invariant unter allen Isomorphismen h_ω $(\omega = p \circ \tilde{\omega})$, wobei ω ein geschlossener Weg in x_0 ist. Damit ist die Untergruppe $p_\#\pi_1(E, e_0)$ invariant unter allen Konjugationen mit Elementen $[\omega] = \psi(f)$. Somit normalisiert $\psi(f)$ diese Untergruppe.

Schritt 2: $\psi : Deck \to \frac{N(p_\# \pi_1(E)}{p_\# \pi_1(E)}$. Seien f_1, f_2 zwei Decktransformationen. Wähle Wege $\tilde{\omega}_1$ von e_0 nach $f_1(e_0)$ und $\tilde{\omega}_2$ von e_0 nach $f_2(e_0)$. Dann ist $f_1 \circ \tilde{\omega}_2$ ein weg von $f_1(e_0)$ nach $f_1 f_2(e_0)$ und $\omega_1 * (f_1 \circ \tilde{\omega}_2)$ ein weg von e_0 nach $f_1 f_2(e_0)$.

Also ist $\psi(f_1 \circ f_2) = [p(\omega_1 * (f_1 \circ \tilde{\omega}_2))] = [p\tilde{\omega}_1] * [p\tilde{\omega}_2] = \psi(f_1) \circ \psi(f_2)$.

Schritt 3: Jedes Element $[\omega] \in N(p_\#(\pi_1(E)))$ kommt von einer Decktransformation.

Beweis: Gegeben sei ω. Hebe ω zu einem Weg $\tilde{\omega}$ mit $\tilde{\omega}(0) = e_0$ und betrachte $e_1 := \tilde{\omega}(1)$.

Dann gilt: $p_\# \pi_1(E, e_0) = h_{[\omega]} p_\# \pi_1(E, e_0) = p_\# h_{[\omega]} \pi_1(E, e_0) = p_\# \pi_1(E, e_0)$.

$$\begin{array}{ccc} & & (E, e_0) \\ & \overset{f}{\nearrow} & \downarrow p \\ (e, e_1) & \overset{p}{\to} & (X, x_0) \end{array}$$

Damit ist f die gesuchte Decktransformation und $\psi(f) = \omega$ nach Konstruktion.

□

10.6 Konstruktion und Klassifikation von Überlagerungen

Wir wissen: Zu jeder Überlagerung $p : E \to X$ gehört eine Untergruppe, nämlich $p_\# \pi_1(E) \subset \pi_1(X)$. Diese Untergruppe ist bis auf Konjugation innerhalb von $\pi_1(X)$ eindeutig bestimmt.

Satz 134. *Sei X wie üblich, d. h. wegzusammenhängend und* lokal *wegzusammenhängend. Dann gibt es zu jeder Untergruppe $G \subset \pi_1(X, x_0)$ eine Überlagerung $p : (E, e_0) \to (X, x_0)$ mit*

1. *E ist zusammenhängend*
2. *$p_\#(\pi_1(E, e_0)) = G$.*

Beweisidee. Gegeben sind (X, x_0) und $G \subset \pi_1(X, x_0)$. Sei Ω die Menge aller Wege $\omega : [0, 1] \to X$ mit $\omega(0) = x_0$, $p : \Omega \to X$ definiert durch $p(\omega) = \omega(1)$.
Wir erhalten eine Topologie auf Ω durch $K \subset [0, 1]$ kompakt, $x_0 \in U \subset X$ offen $\Rightarrow \Omega(K, U) = \{\omega \in \Omega | \omega(K) \subset U\}$. Die Familien der Durchschnitte $\Omega(K_1, U_1) \cap \ldots \cap \Omega(K_n, U_n)$ bildet die Basis einer Topologie in Ω (kompakt-offene Topologie) und $p : \Omega \to X$ wirkt stetig: $p^{-1}(U) = \{\omega \in \Omega | \omega(1) \in U\} = \Omega(\{1\}, U)$ ist offen.
Definition eine Relation in Ω: $\omega, \omega_1 \in \Omega$.
$\omega \sim \omega_1 \Leftrightarrow p(\omega) = p(\omega_1)$ und $[\omega_1 * \omega^{-1}] \in G \subset \pi_1(X, x_0)$
$E := \Omega / \sim$ ist dann ein topologischer Raum, $p : E \to X$ ist wohldefiniert.
Behauptung: Dies ist die gesuchte Überlagerung.

1. $p : E \to X$ kein Problem

2. E ist wegzusammenhängend, weil auch Ω wegzusammenhängend ist.

3. $p : E \to X$ wird eine offene Abbildung

4. Konstrution spezieller offener Mengen in E (d. h. spezielle Familien von Wegen)

Zusammenfassung: Die Überlagerungen von X (wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend) werden bis auf Äquivalenz durch die Klassen konjugierter Untergruppen von $\pi_1(X)$ klassifiziert. □

Satz 135. *Gegeben sei die universelle Überlagerung $p_{univ} : E_{univ} \to X$. Jede Überlagerung von X ist das surjektive Bild der universellen Überlagerung.*

10.6.1 Algebraische Topologie

1. Homotopietheorie: $X \to \pi_n(X), n = 1, 2, \ldots$

2. Homologietheorie: $x \to H_i(X), i = 0, 1, 2, \ldots$ sowie Kohomologietheorie.

3. Bordismentheorien: $X \to \Omega(X)$

4. K-Theorie: $X \to K(X)$

11 Homologie- und Kohomologietheorie

11.1 Algebraische Vorbereitungen

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins.

Definition 136. Eine *Kettenkomplex* ist eine Folge von R-Moduln und Homomorphismen

$$\mathcal{C} : \cdots \to C_{n+1} \overset{\partial_{n+1}}{\to} C_n \overset{\partial_n}{\to} C_{n-1} \to \cdots$$

mit $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ *Zyklen:* $Z_n(\mathcal{C}) = \ker(\partial_n)$
Ränder: $B_n(\mathcal{C}) = \operatorname{im}(\partial_{n+1})$
es folgt: $B_n(\mathcal{C}) \subset Z_n(\mathcal{C})$
Die *n-te Homologie* von $\mathcal{C}$ ist $H_n(\mathcal{C}) = Z_n(\mathcal{C})/B_n(\mathcal{C})$.
Seien $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ Kettenkomplexe. Eine lineare *Kettenabbildung* $\tau : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ ist eine Folge von Homomorphismen $\tau_n : C_n \to C'_n$, so dass folgendes Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \to & C_{n+1} & \overset{\partial_{n+1}}{\to} & C_n & \overset{\partial_n}{\to} & C_{n-1} & \to \cdots \\
 & & \tau_{n+1} \downarrow & & \tau_n \downarrow & & \tau_{n-1} \downarrow & \\
\cdots & \to & C'_{n+1} & \overset{\partial'_{n+1}}{\to} & C'_n & \overset{\partial'_n}{\to} & C'_{n-1} & \to \cdots
\end{array}$$

Dies heißt insbesondere $\tau_n(Z_n(\mathcal{C})) \subseteq Z_n(\mathcal{C}')$ und $\tau_n(B_n(\mathcal{C})) \subseteq B_n(\mathcal{C}')$. Also wird eine Abbildung $\tau_* : H_n(\mathcal{C}) \to H_n(\mathcal{C}')$ induziert.

Definition 137. Sei $\mathcal{C}^\lambda$ eine Familie von Kettenkomplexen, $\lambda \in \Lambda$. $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{C}^\lambda$ und $\prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{C}^\lambda$ sind als Kettenkomplexe definiert. $H_n(\bigoplus_\lambda \mathcal{C}^\lambda) = \bigoplus_\lambda H_n(\mathcal{C}^\lambda)$. Ein Kettenkomplex $\mathcal{C}$ heißt *exakt*, wenn $\operatorname{im}(\partial_{n-1}) = \ker(\partial_n)$ gilt.

Bemerkung. In einem Kettenkomplex ist die Homologie $H_n(\mathcal{C})$ ein Maß für die Nicht-Exaktheit des Kettenkomplexes an der n-ten Stelle.

Definition 138. Eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen ist die Sequenz

$$0 \to \mathcal{C} \xrightarrow{\tau} \mathcal{C}' \xrightarrow{\tau'} \mathcal{C}'' \to 0$$

Satz 139. *Sei* $0 \to \mathcal{C} \xrightarrow{\tau} \mathcal{C}' \xrightarrow{\tau'} \mathcal{C}'' \to 0$ *eine kurze exakte Sequenz. Dann existiert eine Serie von Homomorphismen* $\partial_* : H_n(\mathcal{C}'') \to H_{n-1}(\mathcal{C})$ *derart, dass die dann entstehende Folge wieder exakt wird. Wir bezeichnen* ∂_* *als* Randoperator *einer kurzen exakten Sequenz.*

Beweis. Zu definieren ist $\partial_* : H_n(\mathcal{C}'') \to H_n(\mathcal{C})$. Betrachte $[z''_n] \in H_n(\mathcal{C}'')$. Weil $\tau'_n : \mathcal{C}'_n \to \mathcal{C}''_n$ surjektiv ist, existiert $c'_n \in C'_n$ mit $z''_n = \partial'_n(c'_n)$.
Dann gilt $\partial'_n(c'_n) \in \ker(\tau'_n) = \operatorname{im}(\tau_{n-1})$.
Damit existiert $c_{n-1} \in C_{n-1}$ mit $\tau_{n-1}(c_{n-1}) = \partial'_n(c'_n)$. Also ist c_{n-1} ein Zyklus in $\mathcal{C}$, weil $\partial_{n-1}(c_{n-1}) = \partial'_{n-1}\tau_{n-1}(c_{n-1}) = \partial'_{n-1}\partial'_n(c'_n) = 0$ und weil τ_{n-2} injektiv ist, gilt $\partial_*[z''_n] := [c_{n-1}] \in H_{n-1}(\mathcal{C})$
Eindeutigkeit von ∂_*: Mehrdeutigkeit kommt von $c'_n, \bar{c}'_n$. $\tau'_n(c'_n) = z''_n, \tau'_n(\bar{c}'_n) = \bar{z}''_n, [z''_n] = [\bar{z}''_n]$. Wegen $[z''_n] = [\bar{z}''_n]$ existiert ein Element $c''_{n+1} \in C''_{n+1}$ mit $z''_n - \bar{z}''_n = \partial''_{n+1}(c''_{n+1})$.
Weil $\tau'_{n+1} : C'_{n+1} \to C''_{n+1}$ surjektiv ist, gibt s $c'_{n+1} \in C'_{n+1}$ mit $\tau'_{n+1}(c'_{n+1}) = c''_{n+1}$.
$\tau'_n(c'_n - \bar{c}'_n) = z''_n - \bar{z}''_n = \partial''_{n+1}(c''_{n+1}) = \partial''_{n+1}\tau'_{n+1}(c'_{n+1}) = \tau'_n\partial'_{n+1}(c'_{n+1})$.
Damit ist $c'_n - \bar{c}'_n - \partial'_{n+1}(c'_{n+1}) \in \ker \tau'_n = \operatorname{im}\tau_n$.
Also gibt es $c_n \in C_n$, so dass $\tau_n c_n = c'_n - \bar{c}'_n - \partial'_{n+1}(c'_{n+1})$.
Wende ∂' an: $\partial'_n\tau_n c_n = \partial'_n c_n - \partial'_n\bar{c}'_n - \partial'_n\partial'_{n+1}(c'_{n+1}) \Rightarrow \tau_{n-1}\partial_n c_n = \partial'_n c'_n - c'_n\bar{c}'_n$.
$\partial'_n c'_n$ und $\partial'_n\bar{c}'_n$ liegen im Bild von τ_{n-1} und ihre Differenz ist im Rand von C_{n-1}.
Damit gilt in $H_{n-1}(\mathcal{C})$, dass die Klasse berechnet mit c'_n glich der Klasse berechnet mit $\bar{c}'_n$ ist.
Es bleibt die Exaktheit zu zeigen.
wir zeigen $\ker\partial_* = \operatorname{im}\tau'_*$ (andere Fälle analog)
Sei $[z''_n] =\in H_n(\mathcal{C}'')$ und gelte $\partial_*[z''_n] = 0$. Dann ist $[c_{n-1}] = 0$ in $H_{n-1}(\mathcal{C})$, also $c_{n-1} \in B_{n-1}(\mathcal{C})$.
Aber: $\tau_{n-1}(c_{n-1}) = \partial'_n c_n$ und $\tau'_n c'_n = z''_n$.
Wenn $c_{n-1} \in B_{n-1}(\mathcal{C})$, dann gibt es $c_n \in C_n$ mit $c_{n-1} = \partial_n c_n$.
Damit folgt: $\tau_{n-1}\delta_n c_n = \tau_{n-1}c_{n-1} = \partial'_n c'_n$. $\partial'_n\tau_n c_n = \partial'_n c'_n \Rightarrow \partial'_n\{\tau_n c_n - c'_n\} = 0$. Damit ist $\tau_n c_n - c'_n \in Z_n(\mathcal{C}')$ ein Zyklus in $\mathcal{C}'$, $[\tau_n c_n - c'_n] \in H_n(\mathcal{C}')$ ist definiert.
$\tau'_*[c'_n - \tau_n c_n] = \tau_n c'_n - \tau'_n\tau_n c_n] = [z''_n]$
Also $\ker\partial_* = \operatorname{im}\tau'_*$ $\square$

Definition 140 (Kettenhomotopie)**.**

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathcal{C}: & \ldots & \to & C_{n+1} & \overset{\partial_{n+1}}{\to} & C_n & \overset{\partial_n}{\to} & C_{n-1} & \to \ldots \\
& & \swarrow D_{n+1} & \tau_{n+1} \downarrow \mu_{n+1} & \swarrow D_n & \tau_n \downarrow \mu_n & \swarrow D_{n-1} & \tau_{n-1} \downarrow \mu_{n-1} & \\
\mathcal{C}': & \ldots & \to & C'_{n+1} & \overset{\partial_{n+1}}{\to} & C'_n & \overset{\partial_n}{\to} & C'_{n-1} & \to \ldots
\end{array}$$

$\mu, \tau : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ seien Kettenabbildungen. μ und τ nennt man *kettenhomotop*, falls Abbildungen $D_n : C_n \to C'_{n+1}$ existieren mit $\tau_n - \mu_n = D_{n-1}\partial_n + \partial'_{n+1}D_n$. Wir schreiben dann $\tau \sim \mu$
Eigenschaften:

1. $\tau \sim \mu$ und $\mu \sim \eta$, dann $\tau \sim \eta$

2. $\tau \sim \mu : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ und $\tau' \sim \mu' : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}''$, dann $\tau' \circ \tau \sim \mu' \circ \mu : \mathcal{C} \to \mathcal{C}''$.

Satz 141. *Sind $\tau \sim \mu : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ kettenhomotop, so gilt $\tau_* = \mu_* : H_n(\mathcal{C}) \to H_n(\mathcal{C}')$.*

Beweis. $\{z_n\} \in H_n(\mathcal{C})$. Dann gilt $\partial_n z_n = 0$. Es folgt $\tau_n(z_n) - \mu_n(z_n) = 0 + \partial'_{n+1}(D_n(z_n))$. Damit ist $\tau(z_n) - \mu_n(z_n)$ ein Rand in $\mathcal{C}'$, also $\{\tau_n(z_n) - \mu_n(z_n)\} = 0$ in $H_n(\mathcal{C}')$.
Also ist $\tau_*\{z_n\} = \mu_*\{z_n\}$. □

Bemerkung. Betrachtet man statt $\mathcal{C} : \ldots \to C_{n+1} \overset{\partial_{n+1}}{\to} C_n \overset{\partial_n}{\to} C_{n-1} \ldots$ eine Folge $\mathcal{C}^*$: $\ldots \to C_{n-1} \overset{\partial^*_{n-1}}{\to} C_n \overset{\partial^*_n}{\to} C_{n+1} \ldots$, so nennt man dies *Kokettenkomplex*. Die *Kohomologie* ist entsprechend $H^n(\mathcal{C}^*) = \ker(\partial^*_n)/\mathrm{im}(\partial^*_{n-1})$

11.2 Typische Konstruktion

Sei $\mathcal{C} : \ldots \to C_{n+1} \overset{\partial_n}{\to} C_n \overset{\partial_{n-1}}{\to} C_{n-1} \to \ldots$ ein Kettenkomplex und A ein R-Modul.
$Hom(C_{n+1}, A) \overset{\partial_n}{\leftarrow} Hom(C_n, A) \overset{\partial_{n-1}}{\leftarrow} Hom(C_{n-1}, A)$.
Homologie (bzw. Kohomologie) verändert sich, anders als bei der Umnumerierung.

11.2.1 Konstruktion der singulären Punkte

$X \to \pi_1(X)$ haben wir schon gemacht.
Betrachten wir nun $X \to H_n(X)$. Mit Top^2 bezeichnen wir die Kategorie der Paare $(X, A), A \subseteq X$ topologischer Räume. Die Morphismen $f : (X, A) \to (Y, B)$ seien die stetigen Abbildungen $f : X \to Y$ mit $f(A) \subset B$. GM sei die Kategorie der graduierten R-Moduln $\{M_n\}$, $f : \{M_n\} \to \{M^*_n\}$ die Morphismen, $f_n : M_n \to M^*_n$

Definition 142 (Axiome der Homologietheorie)**.** Eine Homotopietheorie ist eine Paar $\{H, \partial_n\}$, bestehend aus

1. einem kovarianten Funktor $H : \mathrm{Top}^2 \to \mathrm{GM}$ mit $\mathbb{Z}$-graduierten Bildern. (d. h. jedem Paar topologischer Räume (X, A) wird eine Folge von R-Moduln, $H_n(X, A)$ zugeordnet und jeder stetigen Abbildung $f : (X, A) \to (Y, B)$ wird ein Homomorphismus $H_n(f) : H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$ zugeordnet, und es gilt: $(X, A) \xrightarrow{f} (Y, B) \xrightarrow{g} (Z, C)$, dann $H_n(f \circ g) = H_n(f) \circ H_n(g)$)

2. einer Folge natürlicher Transformationen zwischen den Funktoren:

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{Top}^2 \ni & (X, A) & \to & H_n(X, A) \quad \in \mathrm{Mod} \\ & \downarrow & & \downarrow \partial_n(X, A) \\ \mathrm{Top}^2 \ni & (A, \varnothing) & \to & H_{n-1}(A) \quad \in \mathrm{Mod} \end{array}$$

   Natürlich heißt, dass für $f : (X, A) \to (Y, B)$ das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} H_n(X, A) & \xrightarrow{H_n(f)} & H_n(Y, B) \\ \partial_n(X, A) \downarrow & & \downarrow \partial_n(Y, B) \\ H_{n-1}(A) & \xrightarrow{H_{n-1}(f|_A)} & H_{n-1}(B) \end{array}$$

mit folgenden Eigenschaften:

Homotopieaxiom: Sind $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ homotop, so gilt $H_n(f) = H_n(g) : H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$

Exaktheitsaxiom: $(X, A) \in \mathrm{Top}^2$, $i : (A, \varnothing) \to (X, \varnothing)$, $j : X = (X, \varnothing) \to (X, A)$.

$$\ldots \to H_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_{n+1}(X,A)} H_n(A) \xrightarrow{H_n(i)} H_n(X) \xrightarrow{H_n(j)} H_n(X, A)$$
$$\xrightarrow{\partial_n(X,A)} H_{n-1}(A) \xrightarrow{H_{n-1}(i)} H_{n-1}(X) \to \ldots$$

ist eine lange exakte Sequenz.

Ausscheidungsaxiom: $(X, A) \in \mathrm{Top}^2$, $U \subset A$ offen mit $\overline{U} \subset \mathrm{Int} A$, $j : (X \setminus U, A \setminus U) \to (X, A)$. Dann ist $H_n(j) : H_n(X \setminus U, A \setminus U) \to H_n(X, A)$ isomorph.

Bemerkung. Mit $H_n(X, A) \equiv 0$ erhalten wir trivial eine uninteressante Homologietheorie.

Definition 143. Sei $\{H, \partial_n\}$ eine Homologietheorie. Der *Koeffizient* sei $\{H_n(\text{Punkt})\}$.

Bemerkung.

1. Sind $\{H, \partial_n\}$ sowie $\{H^*, \partial_n^*\}$ zwei Homologietheorien mit isomorphen Koeffizienten, so sind sie gleich. Zum Beispiel für alle CW-Komplexe. (Steenrod/Eilenberg, Foundations of algebraic topology, Princeton 1952)

2. Konsequenz: Man kann mit einer Homologietheorie ausschließlich unter Verwendung dieser Axiome arbeiten, sofern ihre Existenz gesichert ist.

Ziel: Konstruktion einer Homologie mit Koeffizienten. Ab jetzt sei der Ring $R = \mathbb{Z}$, das heißt $H_n(X, A)$ ist eine abelsche Gruppe. Die Koeffizienten sollen

$$H_n(\text{Punkt}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } n = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

sein.

Bemerkung (Theorien mit anderen Koeffizienten)**.** Komplexe $K_{\mathbb{C}}$-Theorie:

$$K_n(\text{Punkt}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n \equiv 0 \mod 2 \\ 0 & n \equiv 1 \mod 2 \end{cases}$$

Reelle K-Theorie (KO-Theorie):

$$KO_n(\text{Punkt}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n \equiv 0 \mod 8 \\ 0 & n \equiv 1 \mod 8 \\ 0 & n \equiv 2 \mod 8 \\ \mathbb{Z} & n \equiv 3 \mod 8 \\ \mathbb{Z}_2 & n \equiv 4 \mod 8 \\ 0 & n \equiv 5 \mod 8 \\ 0 & n \equiv 6 \mod 8 \\ 0 & n \equiv 7 \mod 8 \end{cases}$$

Definition 144. $\Delta_n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ sei der Standardsimplex, also $\Delta_n = \{(x_0, \ldots, x_n) \in [0,1]^{n+1} | \sum x_i = 1\}$. Der Rand ist $\partial\Delta_n = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \Delta_n | x_i = 0 \text{ für ein } i\}$, also $\partial\Delta_n = \Delta_n^0 \cup \Delta_n^1 \cup \ldots \cup \Delta_n^n$ mit $\Delta_n^i = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \Delta_n | x_i = 0\}$. Dann gibt es die Abbildungen $\varepsilon_n^i : \Delta_{n-1} \to \Delta_n^i, \varepsilon_n^i(y_0, \ldots, y_{n-1}) = (y_0, \ldots, y_{i-1}, 0, y_i, \ldots, y_{n-1})$ und Δ_n^i nennen wir *Randsimplizes* von Δ_n.

Lemma 145. *Sei* $0 \le k < j \le n+1$. *Dann gilt:*

$$\varepsilon_{n+1}^j \varepsilon_n^k = \varepsilon_{n+1}^k \varepsilon_n^{j-1} : \Delta_{n-1} \to \Delta_{n+1}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n+1}^j \varepsilon_n^k (y_0, \ldots, y_{n-1}) &= \varepsilon_{n+1}^j (y_0, \ldots, y_{k-1}, 0, y_{k+1}, \ldots, y_{n-1}) \\ &= (y_0, \ldots, y_{k-1}, 0, y_k, \ldots, y_{j-2}, 0, y_{j-1}, \ldots, y_{n-1}) \\ \varepsilon_{n+1}^k \varepsilon_n^{j-1} (y_0, \ldots, y_{n-1}) &= \varepsilon_{n+1}^k (y_0, \ldots, y_{j-2}, 0, y_{j-1}, \ldots, y_{n-1}) \\ &= (y_0, \ldots, y_{k-1}, 0, y_k, \ldots, y_{j-2}, 0, y_{j-1}, \ldots, y_{n-1}) \end{aligned}$$

$\square$

Definition 146. Sei X ein topoologischer Raum. Ein *singulärer n-Simplex* in X ist eine stetige Abbildung $\sigma : \Delta_n \to X$.
$\Delta_n(X)$ ist die freie abelsche Gruppe erzeugt von allen singulären n-Simplizes $\sigma : \Delta_n \to X$, ihre Elemente sind von der Form $\sum_{i=1}^k n_i\sigma_i, n_i \in \mathbb{Z}$ (*singuläre n-Ketten* genannt) und für $n < 0$ definieren wir $\Delta_n(X) := 0$.

Konstruktion eines Kettenkomplexes

$$\ldots \to \Delta_{n+1}(X) \stackrel{\partial_{n+1}}{\to} \Delta_n(X) \stackrel{\partial_n}{\to} \Delta_{n-1}(X) \to \ldots \to \Delta_0(X) \to 0$$

$$\partial_n\left(\sum_i n_i\sigma_i\right) := \sum_i n_i\partial_n(\sigma_i) = \sum_i n_i\left(\sum_{j=0}^n(-1)^j\sigma_i \circ \varepsilon_n^j\right)$$

$$\sigma_i \circ \varepsilon_n^j : \Delta_{n-1} \stackrel{\varepsilon_n^j}{\to} \Delta_n \stackrel{\sigma_i}{\to} X$$

Lemma 147. *$\partial_{n-1}\partial_n = 0$, d. h. die oben konstruierte Folge ist ein Kettenkomplex.*

Beweis. Es genügt $\partial_{n-1}\partial_n\sigma = 0$ für einen n-Simplex $\sigma : \Delta_n \to X$ zu zeigen:

$$\begin{aligned}
\partial_{n-1}\partial_n\sigma &= \partial_{n-1}\left(\sum_{j=0}^n(-1)^j\sigma \circ \varepsilon_n^j\right)\\
&= \sum_{j=0}^n(-1)^j\partial_{n-1}(\sigma \circ \varepsilon_n^j)\\
&= \sum_{j=0}^n(-1)^j\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^j\sigma\varepsilon_n^j\varepsilon_{n-1}^i\\
&= \sum_{j\le i}(-1)^{j+i}\sigma\varepsilon_n^j\varepsilon_{n-1}^i + \sum_{j>i}(-1)^{j+i}\sigma\varepsilon_n^j\varepsilon_{n-1}^i\\
&\stackrel{\text{Lemma}}{=} \sum_{j\le i}\sigma\varepsilon_n^j\varepsilon_{n-1}^i + \sum_{j\le i}(-1)^{j+i+1}\sigma\varepsilon_n^j\varepsilon_{n-1}^i\\
&= \sum_{j\le i}(-1)^{j+i}\sigma\varepsilon_n^j\varepsilon_{n-1}^i + \sum_{j\le i}(-1)^{j+i+1}\sigma\varepsilon_n^j\varepsilon_{n-1}^i\\
&= 0
\end{aligned}$$

□

Seien $(X, A), A \subseteq X$ ein Paar topologischer Räume. Dann erhalten wir durch

$$\begin{array}{ccccccccc}
\Delta(X): & \ldots & \to & \Delta_{n+1}(X) & \stackrel{\partial_{n+1}^X}{\to} & \Delta_n(X) & \stackrel{\partial_n^X}{\to} & \Delta_{n-1}(X) & \to & \ldots\\
 & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\Delta(A): & \ldots & \to & \Delta_{n+1}(A) & \stackrel{\partial_{n+1}^A}{\to} & \Delta_n(A) & \stackrel{\partial_n^A}{\to} & \Delta_{n-1}(A) & \to & \ldots\\
\frac{\Delta(X)}{\Delta(A)}: & \ldots & \to & \frac{\Delta_{n+1}(X)}{\Delta_{n+1}(A)} & \stackrel{\partial_{n+1}^X}{\to} & \frac{\Delta_n(X)}{\Delta_n(A)} & \stackrel{\partial_n^X}{\to} & \frac{\Delta_{n-1}(X)}{\Delta_{n-1}(A)}(X) & \to & \ldots
\end{array}$$

einen Quotientenkettenkomplex.

Definition 148 (SingulÃd're Homologie)**.** $H_n(X, A, \mathbb{Z})$ bezeichnet die n-te Homologie des Kettenkomplexes $\Delta(X)/\Delta(A)$. Ist $f : (X, A) \to (Y, B)$ gegeben, so wird $\Delta(f) : \Delta(X) \to \Delta(Y)$ von f induziert, denn es gilt $\Delta(f)(\sigma) = f \circ \sigma$.

Beachte

$$0 \to \Delta(A) \to \Delta(X) \to \frac{\Delta(X)}{\Delta(A)} \to 0$$

ist eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen. Nach dem Schlangenlemma gibt es also Randoperatoren $\partial_n(X, A) : H_n(X, A, \mathbb{Z}) \to H_{n-1}(A, \mathbb{Z})$, sodass

$$\ldots \to H_{n+1}(X, A, \mathbb{Z}) \overset{\partial_{n+1}}{\to} H_n(A, \mathbb{Z}) \to H_n(X, \mathbb{Z}) \to H_n(X, A, \mathbb{Z}) \overset{\partial_n}{\to} H_{n-1}(A, \mathbb{Z}) \to \ldots$$

eine lange exakte Sequenz ist.
Damit sind der Funktor $H : (X, A) \mapsto \{H_n(X, A, \mathbb{Z})\}_{n \geq 0}$ und die natürliche Transformation ∂ konstruiert.

Exaktheitsaxiom ist erfüllt, wie gerade gesehen.
Es bleiben noch das Homotopieaxiom und das Ausscheidungsaxiom zu beweisen.

Satz 149 (Koeffizienten)**.** *Die Koeffizienten der singulären Homologie sind*

$$H_n(Punkt) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Beweis. Da es nur genau eine Abbildung vom Simplex Δ_n nach X gibt (die konstante Abbildung σ^n), ist

$$\Delta_n(\text{Punkt}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Weiter ist $\partial_1(\sigma^1) = \sigma^1 \circ \varepsilon_1^0 - \sigma^1 \circ \varepsilon_1^1 = \sigma^0 - \sigma^0 = 0$, $\partial_2(\sigma^2) = (1 - 1 + 1)\sigma^1 = \sigma^1$ usw. also sind $\partial_0, \partial_1, \partial_3, \partial_5, \ldots$ die Nullabbildung und $\partial_2, \partial_4, \partial_6, \ldots$ die natürlichen Isomorphismen. Wegen $H_n(\text{Punkt}) = \frac{\ker(\partial_n)}{\text{im}(\partial_{n+1})}$ folgt dann die Behauptung. □

Interpretation von $H_0(X, \mathbb{Z})$ $H_0(X, \mathbb{Z}) = \frac{\Delta_0(X)}{\text{im}(\partial_1)}$

$$\Delta_1(X) \overset{\partial_1}{\to} \Delta_0(X) \to 0$$

$\Delta_0(X)$ - freie abelsche Gruppe erzeugt vom Punkt $x_0 \in X$. $x_0, x_1 \in X$ sind äquivalent, falls sie Rand eines 1-dimensionalen Simplex sind, d.h. wenn sie durch einen stetigen Weg verbunden sind.

Satz 150. *$H_0(X,\mathbb{Z})$ ist die freie abelsche Gruppe erzeugt von den Wegzusammenhangskomponenten von X.*

Beispiel.

$$H_0(\mathbb{R}^n,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$
$$H_0(S^{n-1},\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

Ist $X = Graph(x \mapsto \sin(\frac{1}{x})) \cup \{0\} \times [-1,1]$ so ist X zwar zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend. Es besteht aus 2 Wegzusammenhangskomponenten, sodass $H_0(X,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ist.

11.2.2 Beweis des Homotopieaxioms

Lemma 151. *Sei X eine konvexe Menge. Dann gilt $H_0(X,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ und $H_i(X,\mathbb{Z}) = 0$ für $i > 0$.*

Beweis. Fixiere $x_0 \in X$
Ziel: Wir konstruieren $P_q : \Delta_q(X) \to \Delta_{q+1}(X)$ mit $\partial_{q+1}P_q + P_{q-1}\partial_q = \mathrm{id}_{\Delta_q(X)} - 0$. Das heiÃ§t $\{P_q\}_q$ ist eine Kettenhomotopie zwischen id und $0 : \Delta(X) \to \Delta(X)$. Damit folgt $\mathrm{id} = H(\mathrm{id}) = H(0) = 0$, also $H_n(X) = 0$.
Konstruktion von P_q

Beweis mit Skizze □

Beweis. Reduktion: X sei ein topologischer Raum, $X \overset{i_0,i_1}{\to} X \times I$, $i_0(x) = (x,0), i_1(x) = (x,1)$.

$$\begin{array}{ccccc} \Delta_{n+1}(X) & \to & \Delta_n(X) & \to & \Delta_{n-1}(X) \\ \Delta(i_0) \downarrow \Delta(i_1) & D_n \swarrow & \Delta(i_0) \downarrow \Delta(i_1) & D_n \swarrow & \Delta(i_0) \downarrow \Delta(i_1) \\ \Delta_{n+1}(X \times I) & \to & \Delta_n(X \times I) & \to & \Delta_{n-1}(X \times I) \end{array}$$

Konstruktion per Induktion: $n = 0 : D_0 : \Delta_0(X) \to \delta_1(X \times I)$
Annahme: Alle Abbildungen D_k für $k < n$ seien bereits konstruiert mit der geforderten Eigenschaft.
Vorbemerkung: Δ_n sei Standardsimplex, $\mathrm{Id} : \Delta_n \to \Delta_n$, dann ist $\mathrm{Id} \in \Delta_n(\Delta_n)$. Dieses Element sei $I_n \in \Delta_n(\Delta_n)$.
$\Delta(i_0)(I_n) - \Delta(i_1)(I_n) \in \Delta_n(\Delta_n \times I)$.
$\partial_n I_n \in \Delta_{n-1}(\Delta_n) \Rightarrow D_{n-1}\partial_n I_n \in \Delta_n(\Delta_n \times I)$ ist auch definiert nach Induktionsvoraussetzung.
Betrachte $\Delta(i_0)(I_n) - \Delta(i_1)(I_n) - D_{n-1}\partial_n I_n \in \Delta_n(\Delta_n \times I)$
Berechne $\partial_n(\Delta(i_0)(I_n) - \Delta(i_1)(I_n) - D_{n-1}\partial_n I_n)$

$$\begin{aligned} &= \Delta(i_0)(\partial_n I_n) - \Delta(i_1)\partial_n I_n - \partial_n D_{n-1}\partial_n I_n \\ &= (\Delta(i_0) - \Delta(i_1))(\partial_n I_n) - [\Delta(i_0) - \Delta(i_1) - D_{n-2}\partial_{n-1}]\partial_n I_n \\ &= 0 \end{aligned}$$

Konsequenz: $\Delta(i_0)(I_n) - \Delta(i_1)(I_n) - D_{n-1}\partial_n I_n$ ist ein Zyklus in $\Delta_n(\Delta_n \times I)$.
Aber: $\Delta_n \times I$ ist eine konvexe Menge in $\mathbb{R}^{n+2}$, also $H_n(\Delta_n \times I) = 0$.
Somit gibt es eine $b_{n+1} \in \Delta_{n+1}(\Delta_n \times I)$ mit $\partial_{n+1} b_{n+1} = \Delta(i_1)(I_n) - \Delta(i_1)(I_n) - D_{n-1}\partial_n I_n$.
Wir definieren $D_n : \Delta_n(X) \to \Delta_{n+1}(X \times I)$ wie folgt: Sei $\sigma^n : \Delta_n \to X$ eine Simplex in X. $D_n(\sigma^n) := \Delta_{n+1}(\sigma^n \times \mathrm{Id}_{[0,1]}) \quad \underbrace{b_{n+1}}_{\Delta_{n+1}(\Delta_n \times I)} \quad \in \Delta_{n+1}(X \times I)$
Die konstruierte Abbildung D_n hat die geforderte Eigenschaft.

$$\begin{aligned}
\partial_{n+1} D_n(\sigma^n) &= \partial_{n+1}\Delta_{n+1}(\sigma^n \times \mathrm{Id})(b_{n+1}) \\
&= \Delta_n(\sigma^n \times \mathrm{I})\partial_{n+1} b_{n+1} \\
&= \Delta_n(\sigma^n \times \mathrm{I})\Delta_n(i_0)(I_n) - \Delta_n(\sigma^n \times \mathrm{Id})\Delta_n(i_1)(I_n) - \Delta_n(\sigma \times \mathrm{Id}) D_{n-1}\partial_n I_n \\
&= \Delta_n(i_0)\sigma^n - \Delta_n(i_1)(\sigma^n) - D_{n-1}\Delta_{n-1}(\sigma^n)\partial_n I_n \\
&= \Delta_n(i_0)\sigma^n - \Delta_n(i_1)(\sigma^n) - D_{n-1}\partial_n(\sigma^n)
\end{aligned}$$

□

Beweisidee für das Auschneidungsaxiom. baryzentrische Unterteilung: Sei der Simplex σ^2 derart durch $\sigma^2 \sim \mu^1 + \mu^2 + \mu^3$ als Kette unterteilt, dass $\partial(\sigma^2) = \sigma(\mu^1 + \mu^2 + \mu^3$. Sie ist nicht geeignet, da der Durchmesser der Simplizes nicht uniform verkleinert wird.
Sei $\sigma^n : \Delta_n \to X$ ein Simplex in X. $sd(\sigma^n) \in \Delta_n(X)$ entsteht dadurch, dass man σ^n nach den Schwerpunkten (Baryzenter) seiner Seiten unterteilt.
Es gilt: Ist μ ein Simplex, der in $sd(\sigma^n)$ auftaucht, so gilt $diam(\mu) \leq \frac{n}{n+1} diam(\sigma^n)$. Für Simplizes in $sd^k(\sigma^n)$ gilt $diam(\mu) \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^k diam(\sigma^n)$. □

Definition 152. Sei nun X ein topologischer Raum, $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung. $\Delta^{\mathcal{U}} \hookrightarrow \Delta(X)$ wird erzeugt von $\sigma^n : \Delta_n \to X$ mit $\sigma^n(\Delta_n) \subset U_i$ für wenigstens einen Index $i \in I$.

Satz 153. *$H_n(\Delta^{\mathcal{U}})) \to H_n(\Delta(X))$ ist eine Isomorphie.*

Beweisskizze. Betrachte die Homologieklasse $\{z_n\} \in H_n(\Delta(X))$. $\partial_n z_n = \{0\}$.
$\partial(sd^k(z_n)) = 0$, $\{z_n\} = \{sd^k(z_n)\}$ und $sd^k(z_n)$ ist eine Kette in $\Delta^{\mathcal{U}}(X)$.
Das Ausschneidungsaxiom liefert uns eine Überdeckung von X: $\{\mathrm{Int}(A), X \setminus \overline{U}\}$. Dann gilt $H_n(X, A) = H_n(\Delta^{\mathcal{U}}(X, A))$.
$H_n(X \setminus U, A \setminus U) = H_n(\Delta^{\mathcal{U} \cap (X \setminus U)}(X \setminus U, A \setminus U))$. Die Kettenkomplexe $\Delta^{\mathcal{U}}(X, A)$ und $\Delta^{\mathcal{U} \cap (X \setminus U)}(X \setminus U, A \setminus U)$ sind isomorph, weil $\Delta_n^{\mathcal{U}}(X) =$ Gruppe erzeugt von Simplizes enthalten in $X \setminus \overline{U}$ oder $\mathrm{Int}A$ $=$ Gruppe erzeugt von Simplizes in $X \setminus \overline{U}$ aber nicht vollständig in $\mathrm{Int}A \oplus$ Gruppe erzeugt von Simplizes in U.
$\Delta_n^{\mathcal{U}}(A) =$ Gruppe erzeugt von Simplizes in $A \setminus \overline{U}$, nicht vollständig in $\mathrm{Int}A \oplus$ Gruppe erzeugt von Simplizes in U.
$\frac{\Delta^{\mathcal{U}}(X)}{\Delta^{\mathcal{U}}(A)} = \frac{\text{Gruppe erzeugt von Simplizes in } X \setminus \overline{U}}{\text{Gruppe erzeugt von Simplizes in } A \setminus \overline{U}}$
Analog für $\frac{\Delta^{\mathcal{U}}(X \setminus U)}{\Delta^{\mathcal{U}}(A \setminus U)}$. □

11.2.3 Anwendungen

Berechnung der Homologie der Sphäre

Satz 154. *Sei $S^n \in \mathbb{R}^{n+1}$ die n-dimensionale Sphäre, $n \geq 1$.*
$H_k(S^n, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \textit{wenn } k = 0, n \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$

Beweis. Induktion nach n
$n = 1$: $D^1 = [0,1]$. Es gilt $H_k(D^1) = 0, k > 0$, weil D^1 konvex; und $H_0(D^1) = \mathbb{Z}$.
Wir erhalten die exakte Sequenz:

$$H_k(S^0) \to H_k(D^1) \to H_k(D^1, S^0) \to H_{k-1}(S^0) \to H_{k-1}(D^1)$$

also $H_k(D^1, S^0) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 1 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$
$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, A = \{z \in S^1 : \text{Im}(z) \geq 0\}, U = \{z \in S^1 : \text{Im}(z) > \frac{1}{2}\}$.
Mit dem Ausschneidungsaxiom ist $H_k(S^1, A) = H_k(S^1 \setminus U, A \setminus U) = H_k(S^1 \setminus \text{Int}A, S^0) = H_k(D^1, S^0)$.
Nächster Schritt: (S^1, A) und $H_k(A) = 0, k > 0$ führt über die exakte Sequenz zu $H_k(S^1, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0, 1 \\ 0 & k > 1 \end{cases}$.
$n \geq 2$: Die oberen und unteren Halbkugeln $D^{n+1}_{\pm}$ haben Homologie 0.
$H_k(S^{n+1}) = H_k(S^{n+1}, D^{n+1}_{+}) = H_k(D^{n+1}_{-}, S^n) \xrightarrow{\partial} H_{k-1}(S^n) \to 0$
$H_k(S^{n+1}) = H_{k-1}(S^n)$ □

Satz 155 (BROWER'scher Fixpunktsatz)**.** *Jede stetige Abbildung $f : D^n \to D^n, D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ besitzt mindestens einen Fixpunkt.*

Beweis. Angenommen, es gäbe ein $f : D^n \to D^n$ mit $f(x) \neq x \; \forall x \in D^n$. Wir konstruieren die aus der Geraden durch x und $f(x)$ eine Abbildung $g(x) :=$ Schnitt der Gerade mit der Kugeloberfläche nahe x. Dann ist $g(x) = x \; \forall x \in S^{n-1}$. Sei außerdem $i : S^{n-1} \to D^n$, so dass $g \circ i = \text{Id}_{S^{n-1}}$.

$$H_{n-1}(S^{n-1}) = \mathbb{Z} \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(D^n) = 0 \xrightarrow{g_*} H_{n-1}(S^{n-1}) = \mathbb{Z}$$

Widerspruch. □

Wir erinnern uns an dieser Stelle an die Invarianz der Dimension aus der Linearen Algebra, d. h. zwei endliche Basen eines Vektorraums haben dieselbe Anzahl Elemente; und besteht zwischen zwei endlichdimensionalen eine lineare Bijektion, so besitzen sie dieselbe Dimension. Weiterhin kann die Dimension nicht wachsen, also für eine lineare Abbildung $f : V \to W$ gilt $\dim(V) \geq \dim(\text{im} f)$.
Was hat das mit dem Thema zu tun?
Betrachten wir die PEANO-Kurve, also eine raumfüllende (surjektive) Kurve $f : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$.
Was ist dann die Topologische Dimension?

Satz 156 (BROWER: Topologische Invarianz der Dimension für offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$). *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offene Teilmengen und homöomorph, d. h. es gibt eine beidsetige stetige Bijektion $f : U \to V$. Dann folgt $m = n$.*

Beweis. $\varnothing \neq U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Fixiere eine Punkt $x_0 \in U$. Berechne $H_q(U, U \setminus \{x_0\}) \simeq H_q(D^n, D^n \setminus \{0\}) = H_q(D^n, S^{n-1}) \to H_{q-1}(S^{n-1})$.
Also ist $H_q(U, U \setminus \{x_0\}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.
Konsequenz: Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, so erscheint die Zahl n in der Homologie des Paares $(U, U \setminus \{x_0\})$. □

Korollar 157. *Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume, $f : V \to W$ sei eine Homöomorphismus. Dann ist* $\dim V = \dim W$.

Satz 158 (BROWER: Invarianz des Gebietes). *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $A \subset \mathbb{R}^n$ beliebig. Weiterhin setzen wir voraus, dass A und U homöomrph sind.*
Dann ist $A \subset \mathbb{R}^n$ offen.

Beweis. Folgt am 4.7. □

Definition 159 (Abbildungsgrad für $f : S^n \to S^n$). Sei $f : S^n \to S^n$ stetig, dann ist mit $f_* : H_n(S^n, \mathbb{Z}) \to H_n(S^n, \mathbb{Z})$

$$f_*(x_n) = (\deg(f)) \cdot x_n.$$

Eigenschaften:

1. $\deg(\mathrm{Id}_{S^n}) = 1$
2. Sind $f\tilde{g} : S^n \to S^n$ homotop, so gilt $\deg(f) = \deg(g)$
3. $f, g : S^n \to S^n$, dann $(g \circ f)_*(x_n) = g_* f_*(x_n) = g_*(\deg(f) \cdot x_n) = \deg(f) g_*(x_n) = \deg(f)\deg(g) \cdot x_n$

Satz 160. *$S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ Einheitssphäre, $f : S^n \to S^n$ sei die antipodale Abbildung $f(x) = -x$. Dann ist* $\deg(f) = (-1)^{n+1}$

Beweis. $f = g_1 \circ \ldots \circ g_{n+1}, g_i = (x_1, \ldots, -x_i, \ldots, x_{n+1})$.
$\deg(f) = \prod_{i=1}^{n+1} \deg(g_i) = [\deg(g_1)]^{n+1}$.
Es bleibt noch zu zeigen, dass $deg(g) = -1$.

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(S^n) & \simeq & H_n(S^n, D^n_+) & \simeq & H_n(D^n_-, S^{n-1}) & \simeq & H_{n-1}(S^{n-1}) \\ \downarrow (g_1)_* & & \downarrow (g_1)_* & & \downarrow (g_1)_* & & \downarrow (g_1)_*|_{S^{n-1}} \\ H_n(S^n) & \simeq & H_n(S^n, D^n_+) & \simeq & H_n(D^n_-, S^{n-1}) & \simeq & H_{n-1}(S^{n-1}) \end{array}$$

$\deg(g_1 : S^n \to S^n) = \deg(g_1 : S^{n-1} \to S^{n-1})$
Bei S^1 gilt: $\deg(g_1 : S^1 \to S^1) = -1$ □

Definition 161. $S^n \in \mathbb{R}^{n+1}, x_0 \in S^n, T_{x_0}(S^n) = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x_0, y\rangle = 0\}$ Ein *tangentiales Vektorfeld* ist eine Abbildung $V : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\langle x_0, V(x_0)\rangle = 0 \ \forall x_0 \in S^n$.

Frage: Wann besitzt S^n ein Vektorfeld, welches in keinem Punkt verschwindet.
Für S^1 haben wir $V(x,y) = (-y,x)$. Für S^3 haben wir analog $V(x_1,x_2,x_3,x_4) = (-x_2,x_1,-x_4,x_3)$. Dies geht für alle ungeraden S^n.

Satz 162 (Verallgemeinerung des Satz vom Igel)**.** *Existiert auf S^n ein nirgends verschwindendes Vektorfeld, dann ist n ungerade.*

Beweis. Angenommen, es gäbe ein $V : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit

1. $\langle x, V(x)\rangle = 0$ und
2. $|V(x)| \equiv 1$

$\forall x \in S^n$.
Dann kann Id_{S_n} in die antipodale Abbildung deformiert werden:
$F(x,t) = \cos(\pi t)x + \sin(\pi t)V(x)$. $|F(x,t)| \equiv 1$, weil $\langle x, V(x)\rangle \equiv 0$. Damit ist $\deg(\mathrm{Id}_{S^n}) = \deg(\text{antipodale Abbildung auf } S^n)$, also $1 = (-1)^{n+1}$ und somit n ungerade. $\square$

Frage: Wie viele tangentiale Vektorfelder $V_1,\dots,V_k$ existieren auf S^n derart, dass in jedem Punkt $X \in S^n$ die Vektoren $V_1(x),\dots,V_k(x)$ linear unabhängig sind.
$sp(S^n) =$ Maximale Anzahl ist kleiner gleich n, und für gerades 0 und für ungerades n mindestens 1. Auf S^3 gibt es 3, auf S^7 gibt es 7.
Frage 1: Wann gilt $sp(S^n) = n$? $\longrightarrow$ Nur für S^1, S^3, S^7. Frage 2: Berechne $sp(S^n)$. (Das ist keine Frage.)

11.2.4 Berechnung der Homologie eines CW-Komplexes

Sei X ein CW-Komplex, $X^0 \subset X^1 \subset X^2 \subset \ldots \subset X^n =$ Vereinigung aller Zellen der Dimension $\leq n$.
$W_n(X) := H_n(X^n, X^{n-1})$ Wir definieren $\overline{\partial_n} : W_n(X) \to W_{n-1}(X)$ durch

$$W_n(X) = H_n(X^n, X^{n-1}) \overset{\partial_n}{\to} H_{n-1}(X^{n-1}) \to H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) = W_{n-1}(X)$$

Satz 163.

1. *Die Gruppen $W_n(X)$ sind freie abelsche Gruppen erzeugt von den n-Zellen des CW-Komplexes.*
2. *$\mathcal{W} : \ldots \to W_{n+1}(X) \overset{\overline{\partial_{n+1}}}{\to} W_n(X) \overset{\overline{\partial_n}}{\to} W_{n-1}(X) \to \ldots$ ist ein Kettenkomplex und es gilt $H_n(W) = H_n(X)$ für alle n.*
3. *$W_n(X) = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}\cdot e_i^n \overset{\overline{\partial_{n+1}}}{\to} W_{n-1} = \bigoplus_{j\in J} \mathbb{Z}\cdot e_j^{n-1}$.*

Dann gilt $\overline{\partial_n}(e^n) = \sum_{j\in J} A_j e_j^{n-1}$ mit folgendem A_j:
Sei $\chi_{e^n} : D^n \to X^n$ die charakteristische Abbildung, $\chi_{e^n}|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \to X^{n-1} \to X^{n-1}/X^{n-1} - e_j^{n-1} = S^{n-1}$. Es gilt $A_j = \deg(\mathrm{proj}\chi_{e^n}|_{S^{n-1}})$

Beweis. **1. Schritt:**

$$H_p(X^n, X^{n-1}) = \begin{cases} 0 & p \neq n \\ \text{freie abelsche Gruppe erzeugt von } n\text{-Zellen} \end{cases}$$

e^n sei eine n-Zelle in X, $\chi_{e^n} : D^n \to X^n$ sei die charakteristische Abbildung. Setze anstatt von e^n einen Kreisring: $X^{(n-1)} \cup_{\chi_{e^n}} (D^n \setminus D^n_{\frac{1}{2}})$. Dieser Raum deformiert sich auf $X^{(n-1)}$.

$$\begin{aligned} H_q(X^n, X^{n-1}) &= H_q(X^n, X^{(n-1)} \cup_{\chi_{e^n}} (D^n \setminus D^n_{1/2})) \\ &\overset{\text{Ausschneidung}}{=} \sum_{e^n} H_q(\chi_{e^n}(D^n_{1/2}), \chi_{e^n}(S^{n-1})) = \sum_{e^n} H_q(D^n, S^{n-1}) \end{aligned}$$

2. Schritt: Sei $\mathcal{W}$ ein Kettenkomplex, d. h. $\overline{\partial_n \partial_{n-1}} = 0$

$W_{n+1}(X) = H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \xrightarrow{\partial} H_n(X^n) \to H_n(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(X^{n-1}) \to H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) = W_{n-1}(X)$

3. Schritt: $i : X^n \to X$ sei die Einbettung von X^n in X. Betrachte $i_* : H_p(X^n) \to H_p(X)$. Behauptung: i_* ist für $p < n$ eine Isomorphie.

Betrachte das Paar (X^{n+1}, X^n) und die Sequenz $\ldots \to H_{p+1}(X^{n+1}, X^n) \to H_p(X^n) \xrightarrow{\sim} H_p(X^{n+1}) \to H_p(X^{n+1}, X^n) \to \ldots$. Wenn nun $p < n$, dann ist $H_p(X^n) \simeq H_p(X^{n+1}) \simeq \ldots \simeq H_p(X)$. (weil jede kompakte Teilmenge $C \subset X$ eines CW-Komplexes in einem X^k liegt.

4. Schritt: (analog) Ist $p = n$, so ist $i_* : H_n(X^n) \to H_n(X)$ surjektiv.

5. Schritt: (analog) $j : (X^n, \varnothing) \to (X^n, X^{n-1})$. Dann ist $j_* : H_n(X^n) \to H_n(X^n, X^{n-1})$ injektiv.

6. Schritt: Die Homologie des Kettenkomplexes $\mathcal{W}(X)$ ist isomorph zur Homologie von X:

(Diagramm kommt später …vielleicht.)

7. Schritt: Formel für A_j.

$\square$

Beispiel. $X = T^2 = e^0 \cup (a, b) \cup e^2$

$$0 \to \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \cdot e^2 \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}(a) \oplus \mathbb{Z}(b) \to \mathbb{Z} = \mathbb{Z}(e^0) \to 0$$

$\overline{\partial_2} e^2 = Aa + Bb \Rightarrow A = 0, B = 0 \Rightarrow \overline{\partial_2}$
$\overline{\partial_1} a = 0 = \overline{\partial_2} b \Rightarrow \overline{\partial_1} = 0$
$H_1(T^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, H_0(T^2) = \mathbb{Z}$
Für $X = K^2$ gilt $\overline{\partial} e^2 = 2b + 0a$
$H_2(K^2) = 0, H_1(K^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, H_0(K^2) = \mathbb{Z}$

Korollar 164. *Gilt* $\dim e \leq n$ *für alle Zellen des CW-Komplexes, so folgt* $H_{n+1}(X) = H_{n+2}(X) = \ldots = 0$

Korollar 165. *Hat X nur Zellen gerader Dimension, so gilt:*

- $H_{2k+1}(X) = 0, k \in \mathbb{Z}$
- $H_{2k}(X) =$ *freie abelsche Gruppe erzeugt von allen Zellen der Dimension* $2k$*.*

11.2.5 Betti-Zahlen, Torsionen

(X, A) topologischer Raum. Sei $H_k(X, A)$ eine abelsche, endlich erzeugte Gruppe. Aus der linearen Algebra wissen wir, dass dann $H_k(X, A) = \mathbb{Z} \oplus \ldots \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{\tau_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{\tau_k}$ mit $\tau_i | \tau_{i+1}$.

Definition 166. $b_k(X, A) = k$-te Betti-Zahl, die Anzahl der freien Summanden in $H_k(X, A)$. $\tau_i(X, A) =$ Torsion des Raums.
$\chi(X, A) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k b_k(X, A)$ ist die EULER-*Charateristik*.

Beispiel. $X = K^2, H_2(K^2) = 0, H_1(K^2) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}, H_0(K^2) = \mathbb{Z} \Rightarrow b_2 = 0, b_1 = 1, b_0 = 1, \tau = 2 \Rightarrow \chi_(K^2) = 0$
$X = \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{P}^2, H_2(\mathbb{P}^2) = 0, H_1(\mathbb{P}^2) = \mathbb{Z}_2, H_0(\mathbb{P}^2) = \mathbb{Z} \Rightarrow b_2 = 0, b_1 = 0, b_0 = 1, \tau = 2 \Rightarrow \chi_(\mathbb{P}^2) = 1$