Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Sommersemester 2011

Ausgewählte Kapitel der Funktionentheorie

Dr. Brandt

Bodo Graumann

19. Mai 2014

Inhaltsverzeichnis

XeTeX Der Code wurde mit `gvim` sowie `vim-latex` erstellt und mit `xelatex` kompiliert – all das auf `Gentoo Linux`. Meinen Dank an die Freie Software Community und die TeX-Kollegen auf TeX.SX für ihre Hinweise und Unterstützung.
Bitte schreibt mir eure Kommentare und Verbesserungsvorschläge zu diesem Dokument! Ihr könnt mir entweder direkt mailen oder das Kontaktformular auf meiner Internetseite benutzen.

Literaturempfehlung L.V.Ahlfors: „Complex Analysis“

1 Wertannahme holomorpher Funktionen

Hier und im folgenden werden wir mit

$$\mathbb{D} := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \}$$

die offene *Einheitskreisscheibe* bezeichnen.

1 **Lemma: lokale Invertierbarkeit holomorpher Funktionen**
Sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorph und besitze die KOEBE-Normierung

$$f(0) = 0 \qquad f'(0) = 1$$

sowie für ein $M \in \mathbb{R}$:

$$\forall z \in \mathbb{D} : |f(z)| \leq M$$

Dann ist f^{-1} holomorph in

$$G := \left\{ w \in \mathbb{C} \;\middle|\; |w| < \frac{1}{6M} \right\}$$

mit $f^{-1}(G) \subset \mathbb{D}$.

Bemerkung Aus dem Fakt, dass die Ableitung von f in 0 nicht verschwindet folgt bereits, dass in einer Umgebung von 0 eine holomorphe Umkehrfunktion existiert. Die Qualität dieses Lemmas ist daher die quantitative Beschreibung dieser Umgebung. Weiterhin kann jede holomorphe Funktion durch eine affine Transformation KOEBE-normiert werden, solange $f'(0) \neq 0$ gilt.

Beweis (1) Wir stellen f um 0 als Potenzreihe dar:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, z \in \mathbb{D}, \qquad a_0 = 0, a_1 = 1$$

Für $0 < r < 1$ gilt dann die Integraldarstellung

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{k+1}} \mathrm{d}z \qquad \Rightarrow \qquad |a_k| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi r \frac{M}{r^{k+1}} = \frac{M}{r^k}$$

Insbesondere erhalten wir für $k = 1$ sofort die Bedingung $M \geq 1$. Weiter gilt für $|z| \leq r$:

$$\begin{aligned} |f(z)| &= |z + \sum \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k| = |z||1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^{k-1}| \geq |z| \left(1 - \sum_{k=2}^{\infty} \underbrace{|a_k|}_{\leq M} |z|^{k-1} \right) \\ &\geq |z| \left(1 - M \sum_{k=1}^{\infty} r^k \right) = \frac{|z|}{r} \left(r - M \frac{r^2}{1-r} \right) = \frac{|z|}{r} \cdot \frac{r - (M+1)^2 r^2}{1-r} \end{aligned}$$

Wenn wir also $r \rightsquigarrow r_0 := 1 - \sqrt{\frac{M}{M+1}}$ wählen erhalten wir

$$\begin{aligned}|f(z)| &\geq \frac{|z|}{r_0} \cdot \frac{r_0 - (M+1)r_0^2}{1-r_0} = \frac{|z|}{r_0}\left(-1 - 2\sqrt{M(M+1)} + 2(M+1)\right) \\ &= \frac{|z|}{r_0}\left(\sqrt{M+1} - \sqrt{M}\right)^2 = \frac{|z|}{r_0}\left(\frac{1}{\sqrt{M+1}+\sqrt{M}}\right)^2 \\ &\geq \frac{|z|}{r_0}\left(\frac{1}{\sqrt{2M}+\sqrt{M}}\right)^2 \geq \frac{|z|}{r_0} \cdot \frac{1}{6M}\end{aligned}$$

Damit wissen wir jetzt, dass f für $|z| \leq r_0$ genau die einfache Nullstelle bei $z = 0$ besitzt. Sei $w \in G$ sowie $g(z) := f(z) - w$, dann gilt auf $|z| = r_0$:

$$|f(z) - g(z)| = |w| < \frac{1}{6M} \leq |f(z)|$$

Das bedeutet aber nach dem Satz von ROUCHÉ, dass an genau einem Punkte z, $|z| \leq r_0$ gilt $f(z) = w$. Also ist f in G bijektiv.

2 **Satz: Satz von** BLOCH

Es existiert eine Konstante $B > 0$ (*Bloch-Landau-Konstante*) so, dass von jeder in $\mathbb{D}$ holomorphe Funktion f mit $f'(0) = 1$ eine Kreisscheibe vom Radius B mit Funktionswerten bedeckt wird.

Beweis (2) Setze $r \in (0,1)$ fest und $m := \max_{|z|\leq r}(r - |z|)|f'(z)|$, wobei das Maximum in z_0 angenommen wird, das heißt sofort $f(z_0) = r$. Dann folgt mittels $z = 0$, dass $m \geq r$ und $|z_0| < r$. Wähle weiter $x_0 := r - |z_0|$, das heißt $x_0 \in (0, r]$. Dann gilt $|f'(z_0)| = \frac{m}{x_0}$ und:

$$|z| \leq r - \frac{x_0}{2} \quad \Rightarrow \quad |f'(z)| \leq \frac{m}{r - |z|} \leq \frac{2m}{x_0} \tag{1-1}$$

$$\begin{aligned}&F(z) := \frac{f(\frac{x_0}{2}z + z_0) - f(z_0)}{\frac{x_0}{2}f'(z_0)}, \qquad |\frac{x_0}{2}z + z_0| < 1 \\ &\Rightarrow F(0) = 0 \wedge F'(0) = 1 \\ &|F'(z)| = |\frac{f'(\frac{x_0}{2}z + z_0)}{f'(z_0)}| \overset{1-1}{\leq} 2, \quad z \in \mathbb{D} \\ &\Rightarrow |F(z)| = |\int_{(0,z} F'(\xi)\mathrm{d}\xi| < 2, \quad z \in \mathbb{D}\end{aligned}$$

Nach Lemma 1 für $M = 2$ gilt dann

$$\frac{1}{12}\mathbb{D} \subset F(\mathbb{D}) \quad \Rightarrow \quad f(z_0) + \frac{r}{24}\mathbb{D} \subset f(\mathbb{D})$$

Bemerkung Diese Abschätzung für B ist recht schwach. AHLFORS konnte 1938 zeigen, dass $B \geq \frac{1}{2}$ sein muss. Eine obere Schranke ist $B \leq \frac{\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{5}{6})}{\Gamma(\frac{1}{6})} \approx 0,543$ und es wird vermutet, dass Gleichheit gilt. Das Problem, die Bloch-Landau-Konstante exakt zu bestimmen ist jedoch immer noch offen.

3 **Satz: Satz von** LANDAU

Es existiert eine stetige Funktion $L\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ derart, dass für jede in $\mathbb{D}$ holomorphe Funktion f, die die Werte 0 und 1 dort nicht annimmt, gilt

$$|f'(0)| \leq L(|f(0)|)$$

Beweis (3) Wir betrachten die Funktion

$$F(z) := \ln\left(\sqrt{\frac{\ln f(z)}{2\pi i}} - \sqrt{\frac{\ln f(z)}{2\pi i} - 1}\right), \quad z \in \mathbb{D}$$

Da $f(z) \neq 0$ ist, kann $\ln f(z)$ nach Monodromiesatz als in $\mathbb{D}$ holomorphe Funktion betrachtet werden. Bis auf die Festlegung eines Zweiges ist dann auch F holomorph, da $f(z) \neq 1$. Weiter gilt

$$\sqrt{\frac{\ln f(z)}{2\pi i}} = \frac{1}{2}\left(e^{F(z)} + e^{-F(z)}\right)$$
$$\Rightarrow f(z) = -\exp\left(\frac{\pi i}{2}\left(e^{2F(z)} + e^{-2F(z)}\right)\right) =: G(F(z)), \quad z \in \mathbb{D}$$

Behauptung $F(z) \neq \pm\ln\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right) + m\pi i$ für $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}, z \in \mathbb{D}$

Angenommen dies wäre nicht der Fall für gewisse m, n, z. Dann gilt

$$e^{2F(z)} = \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)^{\pm 2}$$
$$\Rightarrow e^{2F(z)} + e^{-2F(z)} = \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)^2 + \left(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}\right)^2 = 4n - 2$$
$$\Rightarrow f(z) = 1 \qquad \lightning$$

Somit wurde diese Behauptung bewiesen. Weiterhin gilt

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right) = \infty$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(\ln\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right) - \ln\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\right) = 0$$
$$\Rightarrow \exists \rho > 0 \forall z \in \mathbb{C}\colon F(\mathbb{D}) \not\subseteq z + \rho\mathbb{D} \tag{1-2}$$

Sei nun $z_0 \in \mathbb{D}$ so, dass $F'(z_0) \neq 0$, dann definieren wir

$$\tilde{F}(z) := \frac{F((1-|z_0|)z + z_0)}{(1-|z_0|)F'(z_0)}, \quad z \in \mathbb{D}$$

Diese Funktion ist holomorph und $\tilde{F}'(0) = 1$. Nach Satz 2 (Satz von BLOCH) gibt es also eine Kreisscheibe K mit Radius B so, dass $\tilde{F}(\mathbb{D}) \supset K$. Damit überdeckt $z \mapsto F((1-|z_0|)z + z_0)$ die Menge $(1-z_0)|F'(z_0)|K$, also überdeckt $F(\mathbb{D})$ eine Kreisscheibe vom Radius $(1-|z_0|)|F'(z_0)|B$ und mit Equation 1-2 folgt dann

$$\forall z_0 \in \mathbb{D}\colon (1-|z_0|)|F'(z_0)|B < \rho \Leftrightarrow |F'(z_0)| < \frac{\rho}{B(1-|z_0|)}$$

$$f'(0) = G'(F(0))F'(0) \Rightarrow |f'(0)| \leq \frac{\rho}{B}|G'(F(0))|$$

Jetzt wählen wir einen geeigneten Zweig des Logarithmus':

$$\operatorname{Im}\log f(0) = \arg f(0) \in [0, 2\pi), \qquad \operatorname{Re}\log f(0) = \ln|f(0)|$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}\frac{\log f(0)}{2\pi i} = \frac{1}{2\pi}\operatorname{Im}\log f(0) \in [0,1)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im}\frac{\log f(0)}{2\pi i} = \operatorname{Im}\left(\frac{\log f(0)}{2\pi i} - 1\right) = -\frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\log f(0) = -\frac{1}{2\pi}\ln|f(0)|$$

$$|\frac{\log f(0)}{2\pi i}| \leq \sqrt{1 + \frac{1}{4\pi^2}\ln^2|f(0)|}$$

$$\arg\left(\sqrt{\frac{\log f(0)}{2\pi i}} - \sqrt{\frac{\log f(0)}{2\pi i} - 1}\right) \in (-\pi, \pi]$$

$$\Rightarrow |F(0)| \leq |\operatorname{Im} F(0)| + |\operatorname{Re} F(0)| \leq \pi + \max_{j=-1,+1}\left(\ln|\sqrt{\frac{\log f(0)}{2\pi i}} + j\sqrt{\frac{\log f(0)}{2\pi i} - 1}|\right)$$

$$\leq \pi + \ln 2\sqrt[4]{1 + \frac{1}{4\pi^2}\ln^2 f(0)} \leq \underbrace{\pi + \ln 2}_{c_1} + \underbrace{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4\pi^2}}_{c_2}\ln^2|f(0)| =: c_1 + c_2\ln^2|f(0)|$$

$$\Rightarrow |f'(0)| \leq \frac{\rho}{B}|G'(F(0))| \leq \frac{\rho}{B}\max_{|w|\leq c_1 + c_2\ln^2|f(0)|}|G'(w)| =: L(f(0))$$

4 **Satz: Satz von** SCHOTTKEY

Es Existiert eine stetige Funktion $L\colon (0,\infty)\times[0,1) \to (0,\infty)$ so, dass für jede in $\mathbb{D}$ holomorphe Funktion f, die Werte 0 und 1 nicht annimmt, gilt:

$$\forall z \in \mathbb{D}\colon |f(0)| \leq L(|f(0)|, |z|)$$

Beweis (4) Aus dem Beweis von Satz 3 (Satz von LANDAU) ist bekannt, dass

$$F(z) := \ln\left(\sqrt{\frac{\ln f(z)}{2\pi i}} - \sqrt{\frac{\ln f(z)}{2\pi i} - 1}\right), \quad z \in \mathbb{D}$$

holomorph ist, wobei wir den gleichen Zweig wie dort wählen. Außerdem wissen wir bereits

$$\forall z_0 \in \mathbb{D}\colon F(z_0) \leq \frac{\rho}{B}\cdot\frac{1}{1-|z|}$$

Dann folgt für $z \in \mathbb{D}$:

$$|F(z) - F(0)| = |\int_{\overline{0,z}} F'(\xi) \mathrm{d}\xi \,| \leq |z| \frac{\rho}{B} \cdot \frac{1}{1 - |z_0|} < \frac{\rho}{B} \cdot \frac{1}{1 - |z|}$$

$$|F(z)| \leq \frac{\rho}{B} \cdot \frac{1}{1 - |z|} + |F(0)| \leq \underbrace{\frac{\rho}{B}}_{c_0} \cdot \frac{1}{1 - |z|} + c_1 + c_2 \ln^2 |f(0)|$$

$$\Rightarrow |f(z)| = |G(F(z))| \leq \max_{|w| \leq c_0 \frac{1}{1-|z|} + c_1 + c_2 \ln^2 |f(0)|} |G(w)| =: L(|f(0)|, |z|)$$

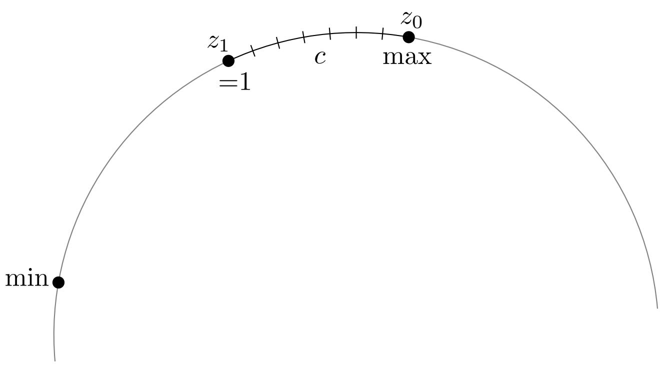
Bemerkung $L(x, \cdot)$ und $L(\cdot, y)$ sind monoton wachsend.

5 **Lemma:**

Es existiert ein $M > 1$ so, dass für jede in $G := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2} \right\}$ holomorphe Funktion f, welche dort die Werte 0 und 1 nicht annimmt gilt:

$$\min_{|z|=1} |f(z)| \leq 1 \qquad \Rightarrow \qquad \max_{|z|=1} |f(z)| \leq M$$

Beweis (5) Wähle z_0 mit $|f(z_0)| = \max_{|z|=1} |f(z)|$. Für $|f(z_0)| \leq 1$ ist dann nichts mehr zu zeigen. Betrachte also im folgenden $|f(z_0)| > 1$. Dann existiert ein Teilbogen c von $\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$



mit Anfangspunkt z_1 und Endpunkt z_0 der Länge $\leq \pi$ sowie $|f(z_1)| = 1$ und $z \in c \setminus \{z_1\} \Rightarrow |f(z)| > 1$. Diesen Bogen c zerlegen wir in 7 Teilbögen gleicher Länge mit Anfangspunkten z_ν und Endpunkten $z_{\nu+1}$ wobei $z_8 = z_0$.

$$f_\nu := f(\underbrace{\frac{1}{2} z + z_\nu}_{\in G})$$

$$\overset{4}{\Rightarrow} |f_\nu(z)| \leq L(|f_\nu(0)|, |z|) = L(|f(z_\nu|, |z|) \overset{\text{Monotonie}}{\leq} L(|f(z_\nu)|, \frac{2\pi}{7}), \quad |z| \leq \frac{2\pi}{7}$$

Wähle $z := 2(z_{\nu+1} - z_\nu)$, dann gilt

$$|z| = |2(z_{\nu+1} - z_\nu)| \leq \frac{2\pi}{7}$$

$$f_\nu(z) = f(z_{\nu+1)} \Rightarrow |f(z_{\nu+1})| = |f_\nu(z)| \leq L(|f(z_\nu)|, \frac{2\pi}{7}) =: L_0(|f(z_0)|)$$

$$f(z_2) \leq L_0(|f(z_1)|) = L_0(1)$$

$$\Rightarrow f(z_3) \leq L_0(|f(z_2)|) \leq L_0(L_0(1)) =: L_0^{\circ,2}(1)$$

$$\ldots$$

$$\Rightarrow f(z_0) \leq L_0^{\circ,7}(1) =: M$$

6 **Satz: Satz von** PICARD

Sei $z_0 \in \hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ eine wesentlich singuläre Stelle von f und U eine offene Umgebung von z_0 so, dass f in $U \setminus \{z_0\}$ holomorph ist. Dann nimmt f in $U \setminus \{z_0\}$ jeden Wert von $\mathbb{C}$, mit höchstens einer Ausnahme, unendlich oft an.

Beweis (6) O.B.d.A.sei $z_0 = \infty$, betrachte sonst $z \mapsto f(\frac{z_0 + \frac{1}{z}}{})$, und $U = \left\{ z \in \hat{\mathbb{C}} \;\middle|\; |z| > R \right\}$ für ein $R > 0$.

Annahme $\exists a, b \in \mathbb{C}, a \neq b \colon a, b \notin f(U)$

Dann ist $g(z) := \frac{f(z)-a}{b-a}$ holomorph in $U^0 := U \setminus \{\infty\}$ mit einer wesentlichen Singularität in ∞ und g nimmt die Werte 0 und 1 nicht an. Nach dem Satz von CASORATI-WEIERSTRAß existiert also eine Folge $(z_n)_{n=1}^\infty$, $z_n \in U^0$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} g(z_n) = 0$.

O.B.d.A.sei weiter $|z_n| \geq 2R$ und $|g(z_n)| \leq 1$ und definiere

$$g_n(z) := g(z_n \cdot z), \qquad \frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2} \Rightarrow |z_n \cdot z| > R$$

Dann ist auch g_n holomorph und $g_n(z) \notin \{0, 1\}$. Außerdem folgt

$$\min_{|z|=1} |g_n(z)| \leq |g_n(1)| = |g(z_n)| \leq 1$$

$$\overset{5}{\Rightarrow} \max_{|z|=1} |g_n(z)| \leq M$$

$$\Rightarrow \max_{|\zeta|=|z_n|} |g(\zeta)| = \max_{|z|=1} |g_n(z)|$$

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| \geq |z_1| \exists n \colon |z| \leq z_n$$

Nach dem Maximumsprinzip bedeutet das:

$$|g(z)| \leq \max_{\substack{|\zeta|=|z_1| \\ \vee |\zeta|=|z_n|}} |g(\zeta)| \leq M$$

Dies ist aber ein Widerspruch, da g bei ∞ eine wesentliche Singularität besitzt. Also ist unsere Annahme falsch, und f nimmt höchstens einen Wert in $\mathbb{C}$ nicht an. Gibt es nun zwei Werte, die nur endlich oft angenommen werden, so führt eine Verkleinerung der Umgebung auf den obigen Fall, dass die zwei Werte garnicht angenommen werden. Was bereits widerlegt wurde.

7 **Korollar: Kleiner Satz von** PICARD

Jede ganze, transzendente Funktion nimmt Jeden Wert aus $\mathbb{C}$ mit höchstens einer Ausnahme unendlich oft an.

Beweis (7) Ist f holomorph in ganz $\mathbb{C}$ und transzendent (d.h. kein Polynom), so besitzt sie bei ∞ eine wesentliche Singularität.

8 **Korollar:**

Jede ganze, nicht konstante Funktion nimmt jeden Wert aus $\mathbb{C}$ mit höchstens einer Ausnahme an.

Beispiele

1. $f(z), z \in \mathbb{C}$ besitzt den PICARDschen Ausnahmewert $w = 0$.
2. Sei $R \equiv 0$ eine rationale Funktion. Dann ist $f(z) := \frac{e^z}{R(z)}$ in einer Umgebung von ∞ holomorph, mit einer wesentlichen Singularität bei ∞. Weiter wird $f(z) = 0$ in einer Umgebung von ∞ nicht angenommen. Also besitzt $e^z = R(z)$ unendlich viele Lösungen.

2 Normale Familien holomorpher Funktionen

9 **Definition: „Lokal gleichmäßige Beschränktheit“**

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\mathscr{F}$ eine Familie von Funktionen $G \to \mathbb{C}$. Die Familie $\mathscr{F}$ heißt in *G lokal gleichmäßig beschränkt*, wenn zu jeder kompakten Teilmenge $\subset G$ ein $M \in \mathbb{R}_+$ so existiert, dass

$$\forall z \in , f \in \mathscr{F} : |f(z)| \leq M$$

10 **Satz: Häufungsprinzip**

Sei G ein Gebiet und $f_n : G \to \mathbb{C}, n = 1, 2, \ldots$ holomorph. Die Familie $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ sei in G lokal gleichmäßig beschränkt. Dann existiert eine Teilfolge, die in G lokal gleichmäßig konvergiert.

Beweis (10)

1. Wir zeigen, dass die f_n in G lokal gleichgradig stetig sind.

Sei $\subset G$ beliebig kompakt und definiere

$$d := \min(\operatorname{dist}(\partial G,), 1)$$

$$\bar{B} := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \exists z_1 \in : |z - z_1| \leq \frac{d}{2} \right\} \qquad \text{kompakt}$$

$$\Rightarrow \; \subset \bar{B} \subset G$$

$$\exists M \in \mathbb{R}_+ \forall z \in \bar{B}, n \in \mathbb{N}^* : |f_n(z)| \leq M$$

Seien $z_1, z_2 \in$ mit $|z_1 - z_2| < \frac{d}{4}$ und definiere

$$c := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - z_1| = \frac{d}{2} \right\} \subset \bar{B}$$

Dann gilt für $j = 1, 2$:

$$f(z_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{z - z_j} \mathrm{d}z$$

$$\Rightarrow |f(z_1) - f(z_2)| = |\frac{1}{2\pi i} \int_c f(z) \left(\frac{1}{z - z_1} - \frac{1}{z - z_2} \right) \mathrm{d}z \,|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \cdot \frac{d}{2} \cdot M \frac{|z_1 - z_2|}{\frac{d}{2} - \frac{d}{4}} = \frac{4M}{d} |z_1 - z_2| < \varepsilon$$

$$\text{für} \quad |z_1 - z_2| < \min(\frac{d}{4}, \frac{d\varepsilon}{4M}) =: \delta$$

2. Wir zeigen, dass eine Teilfolge von (f_n) existiert, die in allen Punkten aus G mit rationalen Koordinaten konvergiert.

   Seien $(r_\nu)_{\nu=1}^\infty$ alle diese Punkte mit rationalen Koordinaten. Dann ist $(f_n(r_1))_{n=1}^\infty$ eine beschränkte Folge komplexer Zahlen. Somit existiert eine konvergente Teilfolge $(f_{n,1}(r_1))_{n=1}^\infty$. Gleiches geht für $(f_{n,1}(r_2))_{n=1}^\infty \rightsquigarrow (f_{n,2}(r_2))_{n=1}^\infty \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow$ so erhält man $(f_{n,j}(z))_{n=1}^\infty$ die in $r_1, \ldots, r_j$ konvergiert. Dann ist die Diagonalfolge $(f_{n,n}(z))_{n=1}^\infty$ in allen Punkten r_ν konvergent.

3. Wir zeigen, dass $(f_{n,n}(z))_{n=1}^\infty$ in G lokal gleichmäßig konvergiert.

   Sei $\subset G$ kompakt und $\bar{B}$ wie in Punkt (1) sowie $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $(f_{n,n}(z))_{n=1}^\infty$ auf $\bar{B}$ gleichgradig stetig sind, existiert $\delta > 0$:

$$|f_{n,n}(z_1) - f_{n,n}(z_2)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{für} \quad |z_1 - z_2| < \delta, z_1, z_2 \in \bar{B}, n \in \mathbb{N}^*$$

   Überdecke die z-Ebene mit einem quadratischen Netz der Diagonallänge $< \min(\frac{d}{2}, \delta)$. Seien weiter $Q_1, \ldots, Q_p$ jene abgeschlossenen Quadratflächen des Netzes die Punkte von enthalten. Dann ist auch $Q_\nu \subset \bar{B}, \nu = 1, \ldots, p$. Für $\nu = 1, \ldots, p$ sei r'_ν ein Punkt mit rationalen Koordinaten aus Q_ν.

$$|f_{n,n}(r'_\nu) - f_{m,m}(r'_\nu)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{für} \quad n, m \geq N_\nu$$

$$N := \max(N_1, \ldots, p)$$

$$\Rightarrow \forall n, m \geq N : |f_{n,n}(r'_\nu) - f_{m,m}(r'_\nu)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Sei nun $z \in$ beliebig. Dann existiert ein ν mit $z \in Q_\nu$ und es gilt für alle $n, m \geq N$:

$$|f_{n,n}(z) - f_{m,m}(z)| \leq |f_{n,n}(z) - f_{n,n}(r'_\nu)| + |f_{n,n}(r'_\nu) - f_{m,m}(r'_\nu)| + |f_{m,m}(r'_\nu) - f_{m,m}(z)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Bemerkung

- In Teil (3) des Beweises haben wir gezeigt: Wenn $(f_n)_{n=1}^\infty$ in G holomorph, lokal gleichmäßig beschränkt und in allen rationalen Punkten konvergent ist, so ist es auch lokal gleichmäßig konvergent.
- Ist $\infty \in G$, so können wir das Häufingsprinzip für einen Punkt $z_0 \in \hat{\mathbb{C}} \setminus G$ auf $(f_n(z_0 + \frac{1}{z}))_{n=1}^\infty$ anwenden. (Im Fall $G = \hat{\mathbb{C}}$ verwendet man den Satz von LIOUVILLE)

11 **Korollar:**

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Aus jeder Folge einer unendlichen Familie $\mathscr{F}$ in G holomorpher Funktionen kann man dann und nur dann eine in G lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge auswählen, wenn $\mathscr{F}$ in G lokal gleichmäßig beschränkt ist.

12 **Satz: Satz von** VITALI

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f_n: G \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}^*$ holomorph. $(f_n)_{n=1}^\infty$ sei in G lokal gleichmäßig beschränkt und konvergent auf einer Menge $E \subset G$, die in G einen Häufungspunkt hat. Dann ist $(f_n)_{n=1}^\infty$ in G lokal gleichmäßig konvergent.

Beweis (12)

Annahme $\exists a \in G: (f_n(a))_{n=1}^\infty$ ist nicht konvergent.

Dann besitzt $(f_n(a))_{n=1}^\infty$ mindestens zwei Häufungspunkte A_1 und A_2 mit gegen diese konvergenten Teilfolgen $f_{n,1}(a) \to A_1$ und $f_{n,2}(a) \to A_2$. Damit sind die $(f_{n,j}(a))_{n=1}^\infty$ in G lokal gleichmäßig beschränkt. Das heißt nach Satz 10 (Häufungsprinzip) existieren Teilfolgen $f_{n,j}^*$ die in G lokal gleichmäßig gegen $f_j^*(z)$ konvergieren. Das heißt aber f_1^* und f_2^* sind Holomorph und stimmen auf E überein. Somit sind sie nach dem Identitätssatz auf G identisch. Also gilt

$$A_1 = \lim_{n\to\infty} f_{n,1}(a) = \lim_{n\to\infty} f_{n,1}^*(a) = f_1^*(a) = f_2^*(a) = \lim_{n\to\infty} f_{n,2}^*(a) = \lim_{n\to\infty} f_{n,2}(a) = A_2 \quad \lightning$$

Die Folge $(f_n(z))_{n=1}^\infty$ konvergiert also punktweise in G.

13 **Definition: „Normale Familie“**

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\mathscr{F}$ eine unendliche Familie in G holomorpher Funktionen. Die Familie $\mathscr{F}$ heißt in G *normal*, wenn man aus jeder Folge von Funktionen aus $\mathscr{F}$ eine Teilfolge auswählen kann, die in G im Sinne der chordalen Metrik lokal gleichmäßig konvergiert. Die *chordale Metrik* ist dabei der euklidische Abstand im $\mathbb{R}^3$ der Bildpunkte auf der Riemannschen Sphäre:

$$\varkappa(w_1, w_2) = \frac{|w_1 - w_2|}{\sqrt{(1 + |w_1|^2)(1 + |w_2|^2)}} \stackrel{!}{=} \varkappa(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2})$$

14 **Satz:**

Sei $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in G holomorpher Funktionen, die in G bzgl. $\varkappa$ lokal gleichmäßig konvergiert. Dann konvergiert $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ in G entweder lokal gleichmäßig gegen eine holomorphe Funktion oder gegen $f \equiv \infty$.

Beweis (14) Sei $f(z) := \lim_{n\to\infty} f_n(z), z \in G$, dann ist $f\colon G \to (\mathbb{C}, \varkappa)$ stetig und $f^{-1}(\infty)$ ist abgeschlossen bzgl. G. Sei $f(z_0) = \infty$, dann gilt:

$$\exists \delta_0 > 0\colon \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - z_0| \leq \delta_0 \right\} \subset G \wedge |f(z)| > 1 \quad \text{für} \quad |z - z_0| \leq \delta_0$$

$$\frac{1}{f_n(z)} \to \frac{1}{f(z)} \quad \text{gleichmäßig für} \quad |z - z_0| \leq \delta_0 \qquad \text{(bzgl. beider Metriken)}$$

Also ist $f_n(z) \neq 0$ in $\left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - z_0| \leq \delta_0 \right\}$ für n hinreichend groß und das heißt $\frac{1}{f(z)}$ ist holomorph für $|z - z_0| < \delta_0$ nach dem 1. Satz von WEIERSTRAß.

Annahme $\exists \delta \in (0, \delta_0)\colon \frac{1}{f(z)} \neq 0 \quad \text{für} \quad |z - z_0| = \delta$

$$|f_n(z_0)| \leq \max_{|z-z_0|=\delta} |f_n(z)|$$

$$\Rightarrow \infty \leq \max_{|z-z_0|=\delta} |f_n(z)| < \infty \quad ↯$$

Also muss z_0 ein Häufungspunkt der Nullstellen von $\frac{1}{f(z)}$ sein. Nach dem Identitätssatz gilt also $\frac{1}{f(z)} = 0$ und somit ist $f(z) = \infty$ für $|z - z_0| < \delta_0$. Das heißt aber, dass $f^{-1}(\infty)$ nicht nur abgeschlossen, sondern auch offen ist. Also $\varnothing$ oder G wie behauptet.

15 **Satz: Lokalität der Normalheit**

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\mathscr{F}$ eine Familie von in G holomorphen Funktionen. $\mathscr{F}$ ist normal in G gdw. $\mathscr{F}$ in jedem Punkt von G normal ist.

Beweis (15) Die Hinrichtung ist klar, da G Umgebung jedem seiner Punkte ist. Es bleibt also noch die Rückrichtung zu zeigen.

Sei $z^* \in G$ beliebig fixiert und definiere

$$_m := \left\{ z \in G \;\middle|\; \operatorname{dist}_\varkappa(\{z\}, \partial G) \geq \frac{1}{m} \operatorname{dist}_\varkappa(\{z^*\}, \partial G) \right\}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Für $z_0 \in G$ bezeichne $\rho(z_0)$ den Radius einer Kreisscheibe mit Mittelpunkt z_0 in der $\mathscr{F}$ normal ist. Sei außerdem $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge aus $\mathscr{F}$ und es gilt

$$G = \bigcup_{z_0 \in G} \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - z_0| < \frac{1}{2}\rho(z_0) \right\} \supseteq {}_1$$

Also gibt es eine endliche Teilüberdeckung von $_1$.

$$_1 \subseteq \bigcup_{\nu=1}^{n^{(1)}} \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - z_\nu^{(1)}| < \frac{1}{2}\rho(z_\nu^{(1)}) \right\} =: U_1$$

Deshalb existiert eine Teilfolge $(f_{n,1})_{n=1}^{\infty}$ von (f_n), die in $\overline{U_1}$ gleichmäßig konvergiert. Weiter erhält man für jedes $m \in \mathbb{N}$ solche endlichen Teilüberdeckungen

$$_m \subseteq \bigcup_{\nu=1}^{n^{(m)}} \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - z_\nu^{(m)}| < \frac{1}{2}\rho(z_\nu^{(m)}) \right\} =: U_m$$

und Teilfolgen $(f_{n,m})_{n=1}^{\infty}$ von (f_n) die in $\overline{U_m}$ gleichmäßig konvergieren. Dann ist für jedes $m \in \mathbb{N}$ die Folge $(f_{n,n}(z))_{n=m}^{\infty}$ eine Teilfolge von $(f_{n,m})$, also ist $(f_{n,n})$ in $_m$ gleichmäßig konvergent.

Sei nun $\subseteq G$ beliebig kompakt.

$$\exists m \in \mathbb{N} \colon \operatorname{dist}_{\chi}(, \partial G) \geq \frac{1}{m} \operatorname{dist}(\{z^*\}, \partial G) \Rightarrow \subseteq _m$$

Also konvergiert $(f_{n,n})$ in gleichmäßig.

16 **Satz:** Montel**sches Hauptkriterium für normale Familien**

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\mathscr{F}$ eine Familie in G holomorpher Funktionen. Existieren $a, b \in \mathbb{C}, a \neq b$ mit

$$\forall z \in G, f \in \mathscr{F} \colon f(z) \neq a, f(z) \neq b$$

So ist $\mathscr{F}$ in G normal.

Beweis (16) Wegen Satz 15 (Lokalität der Normalheit) genügt es zu zeigen, dass $\mathscr{F}$ in jedem Punkt $z_0 \in G$ normal ist. Sei also $z_0 \in G$ beliebig aber fest, $0 < d < \operatorname{dist}(\{z_0\}, \partial G)$ und sei $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge aus $\mathscr{F}$. O.B.d.A.sei $(f_n(z_0))_{n=1}^{\infty}$ in $\hat{\mathbb{C}}$ konvergent. Für $z \in \mathbb{D}$ definieren wir

$$g_n(z) := \begin{cases} \frac{f_n(dz+z_0)-b}{a-b} & \text{für } \lim_{n\to\infty} f_n(z_0) = a \\ \frac{f_n(dz+z_0)-a}{b-a} & \text{für } \lim_{n\to\infty} f_n(z_0) = b \\ \frac{f_n(dz+z_0)-a}{f_n(dz+z_0)-b} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann sind die g_n holomorph in $\mathbb{D}$ und nehmen die Werte 0 und 1 dort nicht an. Nach Satz 4 (Satz von Schottkey) gibt es also eine Funktion $L \colon (0, \infty) \times [0, 1] \to (0, \infty)$ sodass

$$\forall z \in \mathbb{D} \colon |g_n(z)| \leq L(|g_n(0)|, |z|, \quad n = 1, 2, \ldots$$
$$\Rightarrow |z| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow |g_n(z)| \leq L(|g_n(0)|, \frac{1}{2})$$

Weiter gilt nach Konstruktion

$$\lim_{n\to\infty} g_n(0) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} |g_n(0)| \in (0, \infty), \qquad \alpha := \inf_{n\in\mathbb{N}} |g_n(0)|, \quad \beta := \sup_{n\in\mathbb{N}} |g_n(0)|, \quad \alpha, \beta \in (0, \infty)$$
$$|z| \leq \frac{1}{2} \colon \quad |g_n(z)| \leq \max_{x\in[\alpha,\beta]} L(x, \frac{1}{2}) < \infty$$

Also ist $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ in $\frac{1}{2}\mathbb{D}$ lokal gleichmäßig beschränkt. Nach Satz 10 (Häufungsprinzip) gibt es dann eine Teilfolge $(g_{n_k})_k$ die in $\frac{1}{2}\mathbb{D}$ lokal gleichmäßig gegen eine holomorphe Funktion g konvergiert.

1. Fall $f_{n_k}(z) = b + (a-b)g_{n_k}\left(\frac{z-z_0}{d}\right)$ für $|z-z_0| < \frac{1}{2}d$

2. Fall analog

3. Fall $f_{n_k}(z) = \frac{bg_{n_k}\left(\frac{z-z_0}{d}-a\right)}{g_{n_k}\left(\frac{z-z_0}{d}\right)-1} \xrightarrow{\varkappa} \frac{bg\left(\frac{z-z_0}{d}\right)-a}{g\left(\frac{z-z_0}{d}\right)-1}$ wegen der Stetigkeit der MÖBIUStransformation in $\varkappa$.

17 **Satz: Verallgemeinertes Kriterium von** MONTEL

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\mathcal{F}$ eine Familie in G holomorpher Funktionen. Existieren $a, b \in \mathbb{C}$ mit $a \neq b$ und $p \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\begin{aligned}\forall f \in \mathcal{F} \quad & \forall z \in G\colon f(z) \neq a \\ & \wedge \forall z \in G, \text{bis auf } p \text{ Ausnahmen: } f(z) \neq b\end{aligned}$$

So ist $\mathcal{F}$ in G normal.

Beweis (17) Betrachte diesmal

$$g_n(z) := \left(\frac{f_n(z)-a}{b-a}\right)^{\frac{1}{p+1}}, \qquad |z-z_0| < d$$

Diese Funktionen sind holomomrph bis auf Wahl des Zweiges und $g_n(z) \neq 0$. Weiter ist $f_n(z) = b$ wenn $g_n(z)$ eine $p+1$-te Einheitswurzel ist. Das bedeutet aber nach Voraussetzung, dass eine dieser Einheitswurzeln nicht angenommen wird. O.B.d.A.wählen wir den Zweig so, dass dies gerade 1 ist. Nach Satz 16 (MONTELsches Hauptkriterium für normale Familien) gibt es dann eine Teilfolge $(g_{n_k})_k$ die in $z_0 + d\mathbb{D}$ bzgl. $\varkappa$ lokal gleichmäßig gegen g konvergiert. Dann ist aber auch

$$f_{n_k}(z) = a + (b-a)(g_{n_k}(z))^{p+1} \to a + (b-a)g(z)^{p+1}$$

lokal gleichmäßig.

Gegenbeispiele Folgende Familien sind zum Beispiel nicht normal:

- $G = \mathbb{C}$, $f_n(z) = nz$
- $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f_n(z) = z^n$

18 **Satz: gemeinsame Wertannahme**

Für die Familie aller holomorpher Funktionen $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ mit $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$, die in $\mathbb{D}$ den Wert 0 in nicht mehr als p Punkten annehmen, existiert ein $\rho_p > 0$ so, dass $\left\{ w \in \mathbb{C} \,\middle|\, |\omega| < \rho_p \right\} \subset f(\mathbb{D})$.

Beweis (18) Der Beweis erfolgt indirekt: Angenommen die Behauptung ist nicht erfüllt, das heißt es existiert eine Folge von Funktionen $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ und eine Folge von komplexen Zahlen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ wobei $\forall n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{D}$: $f_n(z) \neq a_n(z)$. Dann ist automatisch $a_n \neq 0$ und wir können

$$\varphi_n(z) := \frac{f_n(z)}{a_n}, \quad z \in \mathbb{D}, n \in \mathbb{N}$$

definieren. Nach der Annahme ist $\varphi_n(z) \neq 1$ für alle $z \in \mathbb{D}$ und $\varphi_n(z) = 0$ für höchstens p Punkte in $\mathbb{D}$. Nach Satz 17 (Verallgemeinertes Kriterium von MONTEL) ist somit $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ eine normale Familie. Das heißt insbesondere, dass es eine Teilfolge $(\varphi_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ gibt die in der chordalen Metrik lokal gleichmäßig konvergiert. Da aber $\varphi_{n_k}(0) = 0$ ist, kann (φ_{n_k}) nicht gegen die konstante ∞-Funktion konvergieren. Also konvergiert sie in der Standardmetrik lokal gleichmäßig gegen eine Funktion φ (nach Satz 14). Damit konvergiert die Folge $(\varphi'_{n_k}(0))$ gegen ein $\varphi'(0) \in \mathbb{C}$. Jedoch ist nach Definition

$$\varphi'_{n_k}(0) = \frac{f'_{n_k}(0)}{a_{n_k}} = \frac{1}{a_{n_k}} \to \infty$$

divergent ↯.

Bemerkung Für $p = 1$ ist bereits von CARATHÉODORY die scharfe Konstante $\rho_1 = \frac{1}{16}$ gefunden worden.

3 Konforme Abbildungen einfach- und mehrfach zusammenhängender Mengen

19 **Satz:**

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in G holomorpher, injektiver Funktionen, die in G lokal gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergierten. Dann ist f in G holomorph und injektiv oder konstant.

Beweis (19) f ist holomorph nach dem Konvergenzsatz von WEIERSTRAß. Weiter indirekt:

Annahme: f ist weder konstant, noch injektiv.

$$\Leftrightarrow \exists z_1 \neq z_2 \in G\colon f(z_1) = f(z_2) =: w_0$$

Dann existiert ein $\delta > 0$ so, dass $\overline{z_1 + \delta\mathbb{D}} \subseteq G$, $\overline{z_2 + \delta\mathbb{D}} \subseteq D$ und $\delta < \frac{1}{2}|z_1 - z_2|$ sowie für $z, |z - z_1| = \delta \vee |z - z_2| = \delta$ gilt:

$$\exists m > 0\colon |f(z) - w_0| \geq m$$
$$\exists n \in \mathbb{N}\colon |f_n(z) - f(z)| < m$$
$$\Rightarrow |(f(z) - w_0) - (f_n(z) - w_0)||f_n(z) - f(z)| < m \leq |f(z) - w_0|$$

Also besitzt nach dem Satz von ROUCHÉ auch $f_n(z) - w_0$ eine Nullstelle für $|z - z_1| = \delta$ als auch für $|z - z_2| = \delta$. Da diese Kreise aber disjunkt sind, sind dann f_n nicht injektiv, im Widerspruch zur Voraussetzung.

20 **Satz:** RIEMANN**scher Abbildungssatz**

Sei $G \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit mindestens 2 Randpunkten. Dann existiert eine in G holomorphe, injektive Funktion f so, dass $f(G) = \mathbb{D}$.

Bemerkung Dieser Satz wurde von RIEMANN in seiner Dissertation von 1851 ausgesprochen und durch KOEBE und CARATHEODORY anno 1912 zuerst vollständig bewiesen.

Bemerkungen

1. $\hat{\mathbb{C}}$ und die einfach punktierte Sphäre lassen sich nicht konform auf $\mathbb{D}$ abbilden. (wegen dem Satz von LIOUVILLE)
2. Die Gesamtheit der konformen Abbildungen von G auf $\mathbb{D}$ ergibt sich indem man auf f eine beliebige konforme Abbildung $\mathbb{D} \to \mathbb{D}$ setzt.
3. Seien G_1 und G_2 zwei einfach zusammenhängende Gebiete mit jeweils mindestens 2 Randpunkten, dann existiert eine konforme Abbildung von G_1 und G_2.

21 **Definition: „Bezeichnungen“**

Sei $G \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ mit $\infty \in G$ ein Gebiet. Dann bezeichnen wir mit $\Sigma'(G)$ die Menge aller in G meromorpher und injektiver Funktionen f mit

$$f(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{z^k} \qquad \text{in einer Umgebung von } \infty$$

Dies ist die *hydrodynamische Normierung*.

Ist insbesondere $\Delta := \left\{ z \in \hat{\mathbb{C}} \;\middle|\; |z| > 1 \right\}$ so schreiben wir $\Sigma' := \Sigma'(\Delta)$. Dabei gilt die Normierung auf ganz Δ.

22 **Satz: Flächensatz**

Für $f \in \Sigma'$ mit $f(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{z^k}, |z| > 1$ gilt

$$\sum_{k=m}^{\infty} k|\alpha_k|^2 \leq 1$$

23 **Satz:**

Für $f \in \Sigma'$ gilt $|\alpha_1| \leq 1$. Gleichheit gilt genau für die Funktionen

$$f\colon f(z) = z + \frac{e^{2i\theta}}{z}, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

Diese Funktionen bilden Δ auf das Komplement der Strecke mit den Endpunkten $\pm 2e^{i\theta}$ ab. Das bedeutet $\hat{\mathbb{C}} \setminus f(\Delta)$ ist eine Strecke der Neigung θ zur reellen Achse.

24 **Korollar:**

Für $f \in \Sigma'$ gilt $\operatorname{Re} e^{-2i\theta}\alpha_1 \leq 1$ mit Gleichheit genau für $z \mapsto z + \frac{e^{2i\theta}}{z}$.

25 **Satz:**

Sei $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von Funktionen aus $\Sigma'(G)$, dann existiert eine Teilfolge, die in G lokal gleichmäßig gegen eine Funktion $f \in \Sigma'(G)$ konvergiert. (in $\varkappa$)

26 **Satz: Parallelschlitztheorem**

Jedes Gebiet $G \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ mit $\infty \in G$ lässt sich konform auf eine ∞ enthaltendes Gebiet in $\hat{\mathbb{C}}$ derart durch eine Funktion $f \in \Sigma'(G)$ abbilden, dass jedes in $\hat{\mathbb{C}} \setminus G$ enthaltene Kontinuum (d.h. abgeschlossen und zusammenhängend mit mindestens 2 Punkten) eine Strecke ist.

Bemerkungen

- Es wird nicht ausgeschlossen, dass G endlich-vielfach zusammenhängend ist, d.h. es können Häufungsrandkomponenten auftreten.
- Das Parallelschlitztheorem wurde von HILBERT im Sommersemester 1909 ausgesprochen. Vollständige Beweise gab es von KOEBE und COURANT 1910.

Bemerkungen

- Im Fall endlich-vielfach zusammenhängender Gebiete gilt Einzigheit für f_θ.

  $$f_\theta(z) = e^{-i\theta}\left(f_0(z)\cos\theta - i f_{\frac{\pi}{2}}(z)\sin\theta\right)$$

  Zum Beispiel für $\Sigma' = \Sigma'(\Delta)$:

  $$f_\theta(z) = z + \frac{e^{2i\theta}}{z}$$

- Ist G n-fach zusammenhängend ohne punktförmige Randkomponenten, so gibt es $3n$ Parameter des Bildes. 6 davon sind durch MÖBIUStransformationen gebunden. Also gibt es für $n \geq 3$ genau $3n - 6$ konforme Invarianten

- COURANT (1940): Ist G n-fach zusammenhängend, so gibt es ein $f \in \Sigma'(G)$ so, dass das äußere der k-ten Randkomponente bis auf Streckungen und Verschiebungen ein vorgegebenes zusammenhängendes Gebiet $G_k \ni \infty$ mit mindestens 2 Randpunkten ist. (Erst 1980 wurde dies ohne die Voraussetzung, dass das Komplement von G_k eine geschlossene, konvexe JORDANkurve ist, bewiesen.)

4 Unendliche Produkte

27 **Definition: „Unendliche Produkte“**

Sei $(a_k)_{k=1}^\infty$ eine Folge aus $\mathbb{C}$ mit $1 + a_k \neq 0$ für alle k. Die Folge

$$(p_n)_{n=1}^\infty, \quad p_n := \prod_{k=1}^{n}(1 + a_k)$$

heißt *unendliches Produkt* mit den Faktoren $1 + a_k$. Das unendliche Produkt ist *konvergent* gegen $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, falls $\lim_{n\to\infty} p_n = p$ und wir schreiben dann

$$p = \prod_{k=1}^{\infty}(1 + a_k)$$

Betrachte jetzt $\sum_{k=1}^\infty \log(1 + a_k)$ mit $\log(1 + a_k) = \ln|1 + a_k| + i\arg(1 + a_k)$ bei Wahl des Hauptzweiges: $-\pi < \arg(1 + a_k) \leq \pi$.

28 **Lemma:**

$\prod_{k=1}^\infty (1 + a_k)$ ist genau dann konvergent, wenn $\sum_{k=1}^\infty \log(1 + a_k)$ konvergiert.

29 **Definition: „Absolute Konvergenz“**

$\prod_{k=1}^\infty (1 + a_k)$ *konvergiert absolut*, falls $\sum_{k=1}^\infty \log(1 + a_k)$ absolut konvergiert.

Bemerkung Aus absoluter Konvergenz folgt Konvergenz und der Wert des unendlichen Produkts ist unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren.

30 **Lemma: Kriterium für absolute Konvergenz**

$\sum_{k=1}^{\infty} \log(1 + a_k)$ ist genau dann absolut konvergent, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert.

31 **Definition: „lokal gleichmäßige Konvergenz"**

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f_k : G \to \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}$ holomorph mit der Eigenschaft:

$$\forall \subseteq G, \text{ kompakt} \exists k_A \in \mathbb{N} : \forall z \in , k \geq k_A f_k(z) \neq 0$$

$\prod_{k=1}^{\infty} f_k$ heißt in G *lokal gleichmäßig konvergent*, wenn für jede kompakte Teilmenge $\subseteq G$ das unendliche Produkt $\prod_{k=k_A}^{\infty} f_k$ in gleichmäßig konvergiert. Dann setzen wir für $z \in$:

$$\prod_{k=1}^{\infty} f_k(z) := \left(\prod_{k=1}^{k_A - 1} f_k(z) \right) \left(\prod_{k=k_A}^{\infty} f_k(z) \right)$$

Diese Definition ist unabhängig von k_A und die Grenzfunktion ist holomorph in G.

5 Produktdarstellung ganzer und meromorpher Funktionen

Wir wissen, dass wir Polynome anhand ihrer Nullstellen als Produkte linearer Faktoren darstellen können:

$$p(z) := a_0 z^0 + \ldots + a_n z^n = a_n \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_n} z^k = a_n \prod_{k=1}^{n} (z - z_k) = a_n' z^\rho \prod_{\substack{k=1 \\ z_k \neq 0}}^{n} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right)$$

Ist f eine ganze Funktion mit nur endlich vielen Nullstellen, so sind

$$g(z) := \frac{f(z)}{z^\rho \prod_{\substack{k=1 \\ z_k \neq 0}}^{n} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right)} \qquad \text{und}$$

$$h(z) := \log g(z) \qquad \text{ganze Funktionen ohne Nullstellen.}$$

$$\Rightarrow f(z) = e^{h(z)} z^\rho \prod_{\substack{k=1 \\ z_k \neq 0}}^{n} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right)$$

Im folgenden betrachten wir nun ganze Funktionen f mit unendlich vielen Nullstellen, $f \not\equiv 0$. Dann bezeichnen wir die von 0 verschiedenen Nullstellen mit $z_1, z_2, \ldots$ inklusive Vielfachheit und $0 < |z_1| \leq |z_2| \leq \ldots$. Es ist außerdem $\lim_{k\to\infty} |z_k| = \infty$. Für die Nullstellen bei $z = 0$ bezeichnen wir mit ρ deren Vielfachheit.

32 **Satz:** WEIERSTRAß

Seien $(z_k)_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $0 < |z_1| \le |z_2| \le \ldots$, $\lim_{k\to\infty} |z_k| = \infty$. Dann existierten $m_k \in \mathbb{Z}_+$ so, dass das unendliche Produkt $\prod_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ mit

$$f_k(z) := \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \exp\left(\sum_{j=1}^{m_k} \frac{1}{j} \left(\frac{z}{z_k}\right)^j\right)$$

in $\mathbb{C}$ lokal gleichmäßig konvergiert. Dies gilt insbesondere für $m_k = k - 1$.

Somit ist nun

$$\pi(z) := \prod_{k=1}^{\#\text{Nst}\neq 0} \left(1 - \frac{z}{z_k} \exp\left(\sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} \left(\frac{z}{z_k}\right)^j\right)\right)$$

in $\mathbb{C}$ lokal gleichmäßig konvergent und

$$g(z) := \frac{f(z)}{z^\rho \pi(z)}$$

besitzt die hebbaren singulären Stellen 0 und z_k. Es gibt also eine ganze Fortsetzung $\tilde{g}$ ohne Nullstellen. $h(z) := \log \tilde{g}(z)$ ist dann ebenfalls ganz und somit gilt

$$f(z) = e^{h(z)} z^\rho \prod_{\substack{k=1 \\ z_k \neq 0}}^{n} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right)$$

Sei jetzt $f \not\equiv 0$ eine in $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion und bezeichnen wir mit ρ_1 die Ordnung der Nullstelle bei 0, z_i^1 die von 0 verschiedenen, betragsmäßig aufsteigenden Nullstellen, mit ρ_2 die Ordnung der Polstelle bei 0 und z_i^2 die Polstellen verschieden von 0, wieder nach Betrach geordnet. Dann ist

$$g(z) := f(z) \frac{z^{\rho_2} \prod_{k=1}^{\#\text{Pst}\neq 0} \left(1 - \frac{z}{z_k^2} \exp\left(\sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} \left(\frac{z}{z_k^2}\right)^j\right)\right)}{z^{\rho_1} \prod_{k=1}^{\#\text{Nst}\neq 0} \left(1 - \frac{z}{z_k^1} \exp\left(\sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} \left(\frac{z}{z_k^1}\right)^j\right)\right)}$$

eine ganze Funktion ohne Nullstellen und mit $h(z) := \log g(z)$ erhalten wir

$$f(z) = e^{h(z)} \frac{z^{\rho_1} \prod_{k=1}^{\#\text{Nst}\neq 0} \left(1 - \frac{z}{z_k^1} \exp\left(\sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} \left(\frac{z}{z_k^1}\right)^j\right)\right)}{z^{\rho_2} \prod_{k=1}^{\#\text{Pst}\neq 0} \left(1 - \frac{z}{z_k^2} \exp\left(\sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} \left(\frac{z}{z_k^2}\right)^j\right)\right)}$$

Das heißt also: Jede meromorphe Funktion $f(z) \not\equiv 0$ ist darstellbar als Quotiont zweier relativ primer, ganzer Funktionen.

Beispiel $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$

33 **Lemma: Erweiterung zum Satz von** WEIERSTRAß

Sei $(z_k)_{k=1}^{\infty}$, $z_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $0 < |z_1| \leq |z_2| \leq \ldots$, $h \in \mathbb{Z}_+$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z_k|^{h+1}} < \infty$. Dann konvergiert $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k} \exp\left(\sum_{j=1}^{h} \frac{1}{j}\left(\frac{z}{z_k}\right)^j\right)\right)$ in $\mathbb{C}$ absolut und lokal gleichmäßig.

34 **Definition: „kanonisches Produkt“**

Falls $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z_k|^{h+1}} < \infty$ ist, heißt $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k} \exp\left(\sum_{j=1}^{h} \frac{1}{j}\left(\frac{z}{z_k}\right)^j\right)\right)$ das *kanonische Produkt* der Folge (z_k)

Problem

- Wann genau gilt $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z_k|^{h+1}} < \infty$?
- Wie sehen die *Einheiten* aus? (d.h. $e^{h(z)}$)

35 **Satz:** POISSON-JENSEN**sche Formel**

Sei $r > 0$, $G_r := r\mathbb{D}$, f eine in $\overline{G_r}$ holomorphe Funktion mit $|z| = r \Rightarrow f(z) \neq 0$. Außerdem bezeichne wieder ρ die Vielfachheit der Nullstelle bei 0 und $z_1, \ldots, z_n$ die in $G_r \setminus \{0\}$ gelegenen Nullstellen von f mit Vielfachheit. Dann gilt für $z \in G_r$ mit $f(z) \neq 0$:

$$\ln|f(z)| = \rho \ln\left|\frac{z}{r}\right| - \sum_{k=1}^{n} \ln\left|\frac{r^2 - \overline{z_k} z}{r(z - z_k)}\right| + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\psi} - z|^2} \ln|f(re^{i\psi})| \mathrm{d}\psi$$

36 **Korollar:** JENSEN**sche Formel**

Ist $f(0) \neq 0$, so erhalten wir bei Grenzübergang $z \to 0$:

$$\lim_{z\to 0} \ln\left|\frac{f(z)}{z^\rho}\right| + \rho \ln r + \sum_{k=1}^{n} \ln\left|\frac{r}{z_k}\right| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln|f(re^{i\psi})| \mathrm{d}\psi$$

$$\Leftrightarrow \lim_{z\to 0} \ln\left|\left(\frac{r}{z}\right)^\rho f(z)\right| = -\sum_{k=1}^{n} \ln\left|\frac{r}{z_k}\right| + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln|f(re^{i\psi})| \mathrm{d}\psi$$

37 **Definition: „Geschlecht“**

Das *Geschlecht* einer ganzen Funktion $f \not\equiv 0$ ist die kleinste Zahl $h \in \mathbb{Z}_+$ derart, dass $f(z)$ als absolut konvergentes Produkt der Form

$$f(z) = z^\rho e^{g(z)} \prod_k \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \exp\left(\sum_{j=1}^{h} \frac{1}{j}\left(\frac{z}{z_k}\right)^j\right), \quad z \in \mathbb{C}$$

dargestellt werden kann, wobei g ein Polynom höchstens h-ten Grades ist.

Beispiele

1. $f(z) = e^z \Rightarrow h = 1$
2. $f(z) \in \mathbb{C}[z] \Rightarrow h = 0$

38 **Definition: „Ordnung“**

Die *Ordnung* einer ganzen Funktion f ist die kleinste Zahl $\lambda \in \mathbb{R}_+$ derart, dass für jedes $\varepsilon > 0$ und r hinreichend groß gilt

$$M(r) := \max_{|z|=r} |f(z)| \leq e^{r^{\lambda+\varepsilon}}$$

Falls kein derartiges $\lambda \in \mathbb{R}_+$ existiert, so ist die Ordnung ∞. Wir schreiben auch $\lambda = \operatorname{ord} f$.

Bemerkung $M(r)$ ist monoton wachsend nach dem Maximumsprinzip. Ist f nicht konstant, so geht $M(r) \to \infty$ für $r \to \infty$. Das heißt

$$\ln \ln M(r) \leq (\lambda + \varepsilon) \ln r$$
$$\Rightarrow \lambda = \limsup_{r \to \infty} \frac{\ln \ln M(r)}{\ln r}$$

39 **Lemma: Eigenschaften der Ordnung**

Seien f und g ganze Funktionen, dann gilt

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{ord}(f+g)\\ \operatorname{ord}(f \cdot g)\end{array}\right\} \leq \max(\operatorname{ord} f, \operatorname{ord} g)$$

40 **Satz:** HADAMARD

Für das Geschlecht h einer ganzen Funktion f gilt:

$$h \leq \operatorname{ord} f \leq h + 1$$

Bemerkung Sei $f \not\equiv 0$ eine Function von endlichem Geschlecht h, d.h.

$$f(z) = z^\rho e^{g(z)} \prod_k \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \exp\left(\sum_{j=1}^{h} \frac{1}{j} \left(\frac{z}{z_k}\right)^j\right), \quad z \in \mathbb{C}$$

Dann gilt für $|z| < |z_1|$:

$$\begin{aligned}
g(z) &= \log\frac{f(z)}{z^\rho} - \sum_k\left(\log(1-\frac{z}{z_k}) + \sum_{j=1}^{h}\frac{1}{j}(\frac{z}{z_k})^j\right) \qquad \mod 2\pi i\\
&= \log\frac{f(z)}{z^\rho} + \sum_k\sum_{j=k+1}^{\infty}\frac{1}{j}(\frac{z}{z_k})^j\\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j!}\left(\lim_{\zeta\to 0}\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}\zeta^j}\log\frac{f(\zeta)}{\zeta^\rho}\right)z^j + \sum_{j=k+1}^{\infty}\left(\frac{1}{j}\sum_k\frac{1}{z_k^j}\right)z^j\\
\Rightarrow g(z) &= \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j!}\left(\lim_{\zeta\to 0}\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}\zeta^j}\log\frac{f(\zeta)}{\zeta^\rho}\right)z^j
\end{aligned}$$

Für $j > h$ gilt außerdem

$$\frac{1}{j!}\lim_{\zeta\to 0}\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}\zeta^j}\log\frac{f(\zeta)}{\zeta^\rho} + \frac{1}{j}\sum_k\frac{1}{z_k^j} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_k\frac{1}{z_k^j} = -\frac{1}{(j-1)!}\lim_{\zeta\to 0}\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}\zeta^j}\log\frac{f(\zeta)}{\zeta^\rho}$$

5.1 Beispiele zum Satz von Hadamard

$$f(z) := \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad z \in \mathbb{C}$$

$$f(z) = 0 \Leftrightarrow z = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$|z| = r\colon |\sin z| \le \frac{e^r + e^r}{2} = e^r \Rightarrow \lambda \le 1$$

$$|\sin(-ir)| = \frac{e^r - e^{-r}}{2} \Rightarrow \lambda \ge 1$$

$$\Rightarrow h \le \lambda = 1 \Rightarrow h = 1 \quad \sim \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{1}{k\pi} = \infty$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \sin(z) &= z^1 e^{g(z)}\prod_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} 1 - \frac{z}{k\pi}e^{-\frac{z}{k\pi}}, \quad \deg g \le 1\\
&= ze^{g(z)}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)
\end{aligned}$$

$$\log\frac{\sin(z)}{z} = \log\left(\frac{z-\frac{z^3}{6}+\dots}{z}\right) = \log\left(1-\frac{z^2}{6}+\dots\right) = O(z^2) \Rightarrow g(z) \equiv 0 \mod 2\pi i$$

$$\Rightarrow \sin z = z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2}\right), \quad z \in \mathbb{C}$$

Folgerung

$$z = \frac{\pi}{2}: \quad 1 = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)(2k)}{(2k-1)(2k+1)} \qquad \text{WALLISsches Produkt}$$

$$j > 1: \quad \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{(k\pi)^j} = -\frac{1}{(j-1)!} \lim_{\zeta \to 0} \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}\zeta^j} \log \frac{\sin \zeta}{\zeta}$$

$$2 \mid j: \quad \zeta(j) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^j} = -\frac{\pi^j}{2(j-1)!} \lim_{j \to 0} \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}\zeta^j} \log \frac{\sin \zeta}{\zeta}$$

$$\cos z = \frac{\sin 2z}{2 \sin z} = \frac{2z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{(2z)^2}{k^2\pi^2}\right)}{2z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)} = \frac{\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{(2z)^2}{(2k)^2\pi^2}\right) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{(2z)^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right)}{\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)}$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{(2z)^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right)$$

5.2 Γ-Funktion

$$\Gamma(z) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t, \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad t^{z-1} := e^{(z-1)\ln t}$$

Für $0 < a < b < \infty$ ist $\int_a^b e^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t$ eine ganze Funktion.

$$|\Gamma(z) - \int_a^b e^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t\,| = |\int_0^a e^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t + \int_a^{\infty} e^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t\,|$$

$$\leq \int_0^a e^{-t} t^{\operatorname{Re} z-1} \mathrm{d}t + \int_b^{\infty} e^{-t} t^{\operatorname{Re} z-1} \mathrm{d}t \to 0 \quad \text{lokal gleichmäßig}$$

Für $x > 0, x \in \mathbb{R}$ ist:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t = \left[e^{-t} \frac{t^x}{x}\right]_0^{\infty} - \int_0^t (-e^{-t}) \frac{t^x}{x} \mathrm{d}t = \frac{1}{x} \Gamma(x+1)$$

Nach dem Permanenzprinzip gilt also für alle $z \in \mathbb{C}$: $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$ und insbesondere ist

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}$$

41 **Lemma:**

Für $x \in (0,1)$ gilt:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\Gamma(x+n+1)}{n^x n!} = 1 \tag{41.1}$$

42 **Satz:**

$1/\Gamma$ ist eine ganze Funktion der Ordnung 1.

5.3 Die Riemannsche ζ-Funktion

Wir betrachten das Gebiet

$$G := \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 1 \}$$

und definieren für $z \in G$ die ζ-Funktion

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z} \qquad \text{wobei } n^z := e^{z \ln n} \text{ ist.}$$

Insbesondere ist dies die einfachste Form einer DIRICHLETreihe. Dabei ist

$$|n^{-z}| = |e^{-z \ln n}| = e^{-\ln n \operatorname{Re} z} = \frac{1}{n^{\operatorname{Re} z}}$$

und somit lokal gleichmäßig konvergent in G. Das heißt ζ ist holomorph in G.

Bezeichne im folgenden mit $\underline{\pi}$ die Menge aller Primzahlen. Dann ist

$$\sum_{p \in \underline{\pi}} p^{-z} \qquad \text{absolut und lokal gleichmäßig konvergent und damit auch}$$

$$\prod_{p \in \underline{\pi}} \frac{1}{1 - p^{-z}} = \prod_{p \in \underline{\pi}} (1 + p^{-z} + p^{-2z} + \ldots) = \sum_{n \in \mathbb{N}} n^{-z} = \zeta(z).$$

Da nun für $z \in G$

$$\zeta(z) = \prod_{p \in \underline{\pi}} \frac{1}{1 - p^{-z}}, \quad \text{so gilt } \sum_{p \in \underline{\pi}} \frac{1}{p} = \infty.$$

Außerdem zeigt diese Darstellung, dass $\zeta(z) \neq 0$ für $z \in G$ ist.

Bezeichnung wir weiter für $x \in \mathbb{R}_+$

$$\tilde{\pi}(x) := \# \{ p \in \underline{\pi} \mid p \leq x \}.$$

Für $\operatorname{Re} z > 2$ können wir nun berechnen:

$$\begin{aligned}
\log \zeta(z) &= \sum_{p \in \underline{\pi}} -\log(1 - p^{-z}) = \sum_{n=2}^{\infty} -(\tilde{\pi}(n) - \tilde{\pi}(n-1)) \log(1 - n^{-z}) \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} -\tilde{\pi}(n) \log(1 - n^{-z}) + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\pi}(n) \log(1 - (n+1)^{-z}) \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} -\tilde{\pi}(n)(\log(1 - (n+1)^{-z}) - \log(1 - n^{-z})) \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{\tilde{\pi}(n) z}{x(x^z - 1)} \mathrm{d}x \; = \int_2^{\infty} \frac{z \tilde{\pi}(x)}{x(x^z - 1)} \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Dieses Integral kann invertiert werden, sodass man eine explizite Darstellung für $\tilde{\pi}$ gewinnt.

5.4 Analytische Fortsetzung von ζ

Zunächst gilt für $\operatorname{Re} z > 0$

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t \quad \text{und wenn wir } t := nx \text{ setzen} \\ &= n^z \int_0^\infty e^{-nx} x^{z-1} \mathrm{d}x \;\Rightarrow n^{-z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty e^{-nx} x^{z-1} \mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Nun gilt für $\operatorname{Re} z > 1$

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^\infty n^{-z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-nx} x^{z-1} \mathrm{d}x = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty \underbrace{\sum_{n=1}^\infty e^{-nx}}_{\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}} x^{z-1} \mathrm{d}x\,.$$

Wir erhalten also die *Integraldarstellung* der ζ-Funktion

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty \frac{x^{z-1}}{e^x - 1} \mathrm{d}x$$

43 **Satz:** DE LA VALLÉE POUSSIN
Sei $z := x + iy$ und $\operatorname{Re} z > 1$, so gilt

$$\zeta^3(x) |\zeta(x+iy)|^4 |\zeta(x+2iy)| \geq 1$$